Raach 2023 Geometrie - Czakler

1. Im Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB und D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von $\angle CBA$ mit der Seite AC. Es sei weiters MD normal auf BD.

   Beweise: $AB = 3BC$.

2. Auf der Seite BC eines Dreiecks ABC liegt der Punkt D. Der Mittelpunkt der Seite AC sei E und AD schneidet die Gerade BE im Punkt F so, dass $AF = BC$ gilt.

   Beweise: $BD = DF$.

3. Es seien AA_1, BB_1 und CC_1 die Höhen in einem spitzwinkeligen Dreieck ABC.

   Man beweise, dass die Fußpunkte der Lote von C_1 auf die Strecken AC, BC, BB_1 und AA_1 auf einer Geraden liegen.

4. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inkreismittelpunkt I. Der Mittelpunkt des Ankreises an die Seite BC sei M_a und S der Schnittpunkt der Innenwinkelsymmetrale von $\angle CAB$ mit der Seite BC. Beweise:

$$\frac{2}{AS} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AM_a}.$$

5. Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Die Winkelsymmetralen AA_1 mit $A_1 \in BC$ und BB_1 mit $B_1 \in AC$ schneiden sich in I. Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks CA_1B_1 sei O.

   Zeige, dass OI normal auf AB steht.

6. Sei C ein Punkt auf einemn Halbkreis mit dem Durchmesser AB. Der Mittelpunkt des Kreisbogens AC sei D und E die Normalprojektion von D auf BC. Der Schnittpunkt von AE mit dem Halbkreis sei F.

   Beweise, dass die Gerade BF die Strecke DE halbiert.

7. Zwei Kreise $k_1$und k_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Strecke CD ist eine Sehne von k_1 die parallel zur Tangente in A an den Kreis k_2 ist. Die von A verschiedenen Schnittpunkte von AC und AD mit k_2 seien E und F.

   Man beweise, dass $CEDF$ ein Sehnenviereck ist.

8. Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden und P sei ein Punkt auf k. Die Geraden PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R.

   Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.

9. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Der Inkreis mit dem Mittelpunkt I berührt die Seite BC in D und die Seite AC in E. Der Schnittpunkt von AD mit BE sei S. Der Schnittpunkt von AD mit dem Inkreis sei $P(\neq D)$.

   Beweise, dass die Punkte P, I, S und E auf einem Kreis liegen.

10. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Die Strecke AB sei eine Sehne des Kreises und C ein Punkt auf AB. Der Umkreis des Dreiecks BCM schneide den Umkreis in einem weiteren Punkt D. Man beweise: $CA = CD$.

11. Seien A, B, C und D Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden g liegen. Der Punkt P liege nicht auf g und es sei $AB = BP$ and $PC = CD$. Die Umkreise der Dreiecke ACP and BDP schneiden sich in P und Q.

    Beweise: $AQ = DQ$

12. Gegeben sei ein Halbkreis k über der Strecke AB mit dem Mittelpunkt M. Der Punkt P sei ein beliebiger Punkt auf AB verschieden von A, B und M. Die Punkte Q und R liegen auf k mit $\angle APQ = 60°$ bzw. $\angle APR = 120°$.

    Man beweise, dass die Punkte $P, Q.R$ und M auf einem Kreis liegen.

13. Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C. Der Höhenfußpunkt der Höhe durch C sei D. Die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ADC und CDB seien M_1 bzw. M_2.

    Man beweise, dass die Punkte A, M_1, M_2 und B auf einem Kreis liegen.

14. Es sei ABC ein Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Der Kreis durch A, C und I schneide die Gerade BC ein zweites Mal im Punkt X, der Kreis durch B, C und I schneide die Gerade AC ein zweites Mal im Punkt Y.

    Man zeige, dass die Strecken AY und BX gleich lang sind.

15. Der Inkreis eines Dreiecks ABC berührt die Seite AC in E und die Seite BC in D. Die Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt B schneidet ED im Punkt P

    Man beweise, dass P auf der Verbindungsgeraden der Seitenmittelpunkte von AB und AC liegt.

16. Der Inkreis eines Dreiecks ABC mit dem Mittelpunkt I berührt die Seite BC in D. Sei M der Mittelpunkt der Seite BC. Beweise, dass der Mittelpunkt der Strecke AD auf MI liegt.

17. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $BC = 2 \cdot AB$. Der Halbierungspunkt der Seite BC sei D, der Halbierungspunkt der Strecke BD sei E. Man zeige, dass AD den Winkel $\angle EAC$ halbiert.

18. Die Diagonalen AC und BD eines Sehnenvierecks $ABCD$ schneiden sich im Punkt E. Die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA seien $M, N.P$ und Q.

    Beweise, dass die Umkreisradien der Dreiecke MEQ und NEP gleich lang sind.

19. Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck. Die Gerade g ist normal auf die Strecke AB durch den Eckpunkt A, die Gerade h ist normal auf die Strecke AB durch den Eckpunkt B. Der Mittelpunkt der Seite AB sei M. Die Normale auf die Seite AC durch M schneidet g im Punkt E und die Normale auf die Seite BC durch M schneidet h im Punkt F. Der Schnittpunkt von EF mit MC sei D.

    Beweise: $\angle EMF = \angle ADB$

20. Sei $ABCD$ ein Rechteck, O der Schnittpunkt der Diagonalen und N und M die Mittelpunkte der Seiten AD bzw CD. Die Normale auf die Diagonale BD durch O schneide die Geraden AB und BC in den Punkten E bzw. F.

    Beweise, dass MF normal auf NE steht.

21. In einem Parallelogramm $ABCD$ werden auf den Seiten AB und BC die Punkte E und F so gewählt, dass sie mit keinem Eckpunkt zusammenfallen und die Strecken AE und FC gleich lang sind. Der Schnittpunkt der Strecken AF und CE wird mit G bezeichnet.

    Beweise, dass DG den Winkel ADC halbiert.

22. Der Inkreis eins Dreiecks ABCberührt die Seiten BC, CA und AB in den Punkten D, E und F. Eine Gerade parallel zu DE schneidet DF im Punkt P und eine Gerade durch A parallel zu DF schneidet DE im Punkt Q.

    Beweise, dass die Gerade PQ die Seiten AB und AC halbiert.

23. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC > BC$ und M sei der Mittelpunkt von AB. Die Höhe durch A sei AD mit $D \in BC$ und die Höhe durch B sei BE mit $E \in AC$. Der Schnittpunkt von AD mit BE sei H und der Schnittpunkt von DE mit AB sei S.

    Beweise, dass die Geraden SH und CM aufeinander normal stehen.

24. Der Inkreis eines Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, AC und AB in den Punkten D, E und F. Sei D' der zu D symmetrische Punkt bezüglich des Inkreismittelpunktes. Die Geraden DE und FD' schneiden einander in S.

    Zeige, dass AS parallel zu BC ist.

25. Auf einem Kreis k mit dem Durchmesser AB liegt der Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen von P auf AB sei Q. Der Kreis mit dem Mittelpunkt P und dem Radius PQ schneidet den Kreis k in den Punkten C und D.

    Beweise, dass die Gerade CD die Strecke PQ halbiert.

26. Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C, M der Mittelpunkt der Seite BC und CF die Höhe durch C. Sei k der Kreis der den Umkreis des Dreiecks ABC in A berührt und durch M geht. Der von M verschiedene Schnittpunkt von k mit BC sei D.

    - Zeige, dass AD die Höhe CF halbiert.
    - Seien H und S die Schnittpunkte von AD bzw. AM mit der Höhe CF.
      Zeige, dass die Punkte S, H, D und M auf einem Kreis liegen.

27. Gegeben sei ein einem Kreis k eingeschriebenes Fünfeck $ABCDE$ mit AC parallel zu DE. Der Mittelpunkt von BD sei M und es gilt $\angle AMB = \angle BMC$.

    Man beweise, dass die Gerade BE die Strecke AC halbiert.

28. Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck , I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks und M der Mittelpunkt der Seite BC. Der Schnittpunkt von MI mit AB sei Q, der Schnittpunkt der Normalen durch B auf AI mit CI sei P.

    Beweise, dass PQ parallel zu AC ist.

29. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$. Die Tangente an den Umkreis des Dreiecks in A schneidet BC in D. Die Normale zu BC durch B schneidet die Streckensymmetrale von AB in E und die Normale auf BC durch C schneidet die Streckensymmetrale von AC in F,

    Zeige, dass D, E und F kollinear sind.

30. Sei ABC ein Dreieck und P ein Punkt auf der Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt C. Die Schnittpunkte der Geraden AP, BP u nd CP mit dem Umkreis des Dreiecks seien D, E bzw. F. Sei H der Schnittpunkt von DF mit BC und G der Schnittpunkt von EF mit AC. Der Schnittpunkt von AH mit BG sei S.

    Bestimme den geometrischen Ort aller Punkte S, wenn P auf der Winkelsymmetrale wandert.

31. Sei ABC ein Dreieck mit $AC \geq BC$ mit dem Umkreis k. Der Punkt M liegt auf k und halbiert den Bogen AB der C enthält. Die Normalprojektion von M auf AC sei D.

    Beweise, Dass $AD = DC + CB$ gilt.

32. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$. Seien K, L und M die Mittelpunkte der Seiten BC, CA beziehungsweise AB. Der Inkreis von ABC mit Mittelpunkt I berühre die Seite BC im Punkt D. Die Gerade g, die durch den Mittelpunkt der Strecke ID verläuft und senkrecht zur Geraden IK ist, schneide LM im Punkt P.

    Zeige: $\angle PIA = 90^0$.