# 56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

3. Mai 2025

---

**Aufgabe 1.** *Es seien $a, b$ und $c$ paarweise verschiedene nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise, dass*

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\Big) > 4$$

*gilt.*

*(Karl Czakler)*

*Lösung 1.* Die Ungleichung ist symmetrisch, daher dürfen wir o. B. d. A. $a > b > c \geq 0$ annehmen. Wir ersetzen das Tripel $(a, b, c)$ durch das Tripel $(a-c, b-c, 0)$.

Klarerweise wird dabei der erste Faktor $(a+b+c)$ kleiner oder bleibt gleich.

Beim zweiten Faktor

$$\Big(\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\Big)$$

bleiben die Nenner unverändert, während die Zähler kleiner werden oder gleich bleiben. Daher wird auch der zweite Faktor kleiner oder bleibt gleich.

Es reicht daher, die Ungleichung für den Fall $c = 0$ zu beweisen. Wir haben also nur noch

$$(a+b)\Big(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\Big) > 4$$

zu zeigen. Das folgt mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung:

$$(a+b)\Big(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\Big) = \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} > 4.$$

Gleichheit kann nicht auftreten, da $a$ und $b$ verschiedene positive Zahlen sind,

*(Karl Czakler)* □

*Lösung 1a.* Sei $c$ die kleinste der drei Zahlen. Dann gilt $|b-c| = b-c < b = |b|$ und somit $(b-c)^2 < b^2$. Analog gilt $(a-c)^2 < a^2$. Außerdem gilt natürlich $(a+b+c) > a+b$.

Damit ergibt sich, dass die linke Seite größer als $(a+b)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)$ ist, womit wie in der ersten Lösung mit der Mittelungleichung sofort alles folgt.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

*Lösung 2.* Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt sich

$$(a+b+c)\Big(\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\Big) \geq \Big(\frac{a}{|b-c|}+\frac{b}{|c-a|}+\frac{c}{|a-b|}\Big)^2.$$

Wegen der Symmetrie der Ungleichung dürfen wir $a > b > c \geq 0$ annehmen und müssen deshalb die Gültigkeit von

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{a-c}+\frac{c}{a-b} > 2 \qquad (*)$$

nachweisen. Für $c = 0$ lautet die Ungleichung

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} > 2.$$

Sie ist wegen $a \neq b$ klar.

Sei im Weiteren $c > 0$. Weil die Ungleichung $(*)$ homogen (vom Grad 0) ist, dürfen wir $c = 1$ annehmen und erhalten damit

$$\frac{a}{b-1} + \frac{b}{a-1} + \frac{1}{a-b} > 2,$$

wobei $a > b > 1$. Wir haben aber

$$\frac{a}{b-1} + \frac{b}{a-1} = \frac{a^2 - a + b^2 - b}{ab - a - b + 1} > 2,$$

denn es ist

$$a^2 + b^2 - a - b > 2(ab - a - b + 1) \iff (a-b)^2 + a + b - 2 > 0$$

und wir sind am Ende des Beweises.

Bemerkung. Die Ungleichung

$$\frac{a}{b-1} + \frac{b}{a-1} > 2$$

lässt sich auch mit der arithmetisch-geometrischen Ungleichung zeigen, denn wir haben

$$\frac{a}{b-1} + \frac{b}{a-1} \geq 2\sqrt{\frac{a}{a-1} \cdot \frac{b}{b-1}} > 2\sqrt{1 \cdot 1} = 2.$$

*(Walther Janous)* □

*Lösung 3.* Wir können o. B. d. A. annehmen, dass $a > b > c \geq 0$ gilt. Wir setzen $s = b - c$ und $t = a - b$. Somit gilt $b = c + s$ und $a = c + s + t$. Wenn wir das in

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}\right) - 4$$

einsetzen und alles auf gemeinsamen Nenner bringen, erhalten wir

$$\frac{1}{s^2t^2(s+t)^2}\big(3c^2s^4 + 6c^2s^3t + 9c^2s^2t^2 + 6c^2st^3 + 3c^2t^4 + 2cs^5 + 5cs^4t \\ +14cs^3t^2 + 16cs^2t^3 + 13cst^4 + 4ct^5 + 5s^2t^4 + 5st^5 + t^6\big)$$

Das ist offensichtlich positiv, weil jeder einzelne Term in Zähler und Nenner positiv ist.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

**Aufgabe 2.** *Sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit $BC > AC$. Sei $S$ der Schwerpunkt von $ABC$ und sei $F$ der Fußpunkt der Höhe von $C$ auf die Seite $AB$. Die Schwerlinie $CS$ schneide den Umkreis $k$ von $ABC$ ein weiteres Mal in $P$. Sie schneide weiters $AB$ in $M$. Die Gerade $SF$ schneide den Umkreis $k$ in $Q$, sodass $F$ zwischen $S$ und $Q$ liegt.*

*Man zeige, dass die Punkte $M, P, Q$ und $F$ auf einem Kreis liegen.*

*(Karl Czakler)*

*Lösung 1.* Wir nennen den zweiten Schnittpunkt der Gerade $SF$ mit dem Umkreis $R$. Bekanntlich geht der Feuerbachkreis durch die Höhenfußpunkte und Seitenmittelpunkte, also insbesondere $F$ und $M$, und wird durch eine Streckung mit Zentrum $S$ und Faktor $-2$ auf den Umkreis von $ABC$ abgebildet. Somit ist auch $R$ das Bild von $F$ unter dieser Streckung und somit sind $FM$ und $CR$ parallel.

Da die Geraden $CR$, $RQ$, $QP$ und $PC$ ein Sehnenviereck (im Umkreis) bilden, gilt das wegen der Parallelität auch für $FM$, $RQ$, $QP$ und $PC$, was das gewünschte Sehnenviereck $MPQF$ ergibt.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

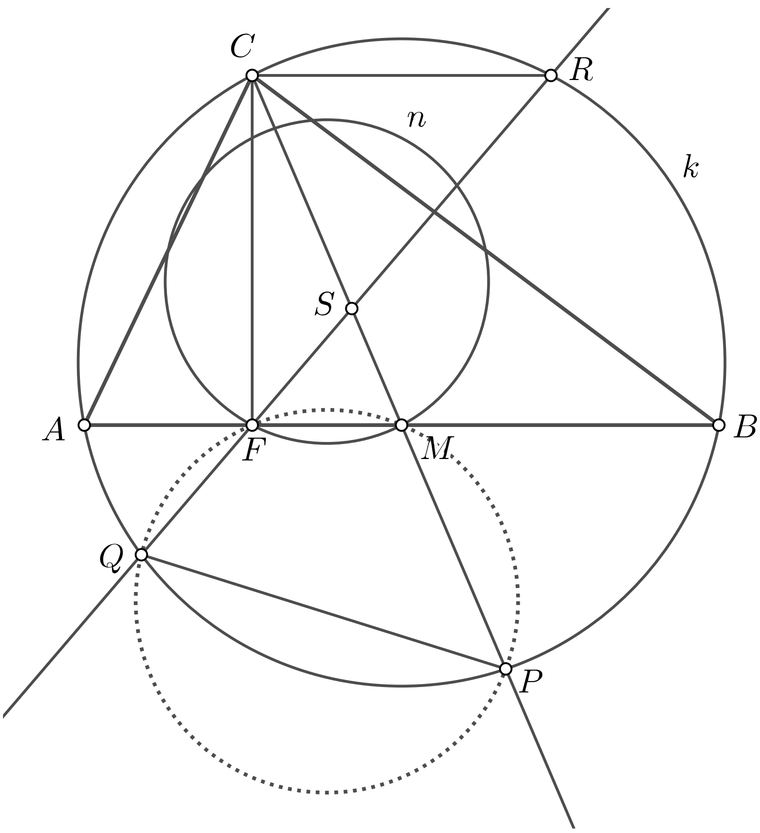


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

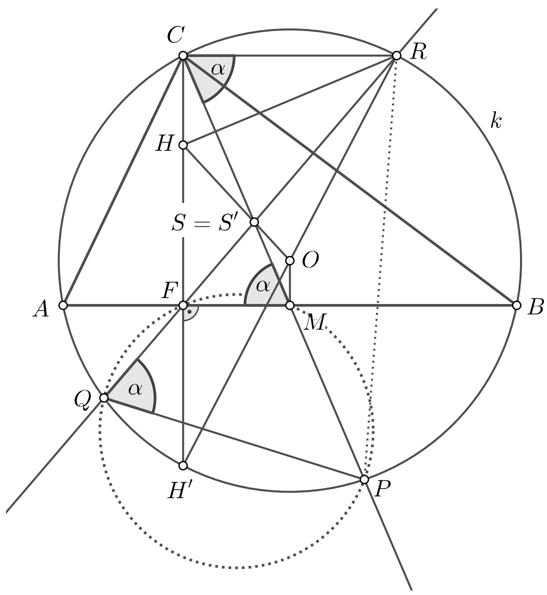


Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

*Lösung 2.* Sei $H$ der Höhenschnittpunkt, $O$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $ABC$ und $H'$ der an $AB$ gespiegelte $H$. Die Gerade $OH'$ schneide $k$ ein weiteres Mal in $R$.

Der Schnittpunkt $S'$ der Geraden $OH$ und $RF$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks $RHH'$.

Da $S'$ die Strecke $OH$ im Verhältnis $1:2$ teilt, ist $S'$ auch der Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$, es gilt also $S' = S$. Daraus folgt, dass die Punkte $R, S, F$ und $Q$ kollinear sind.

Das Dreieck $RCH'$ ist rechtwinkelig, also ist $RC$ parallel zu $AB$. Es gilt nun

$$\angle FMC = \angle RCP = \angle RQP = \angle FQP$$

und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt die Behauptung.

*(Karl Czakler)* □

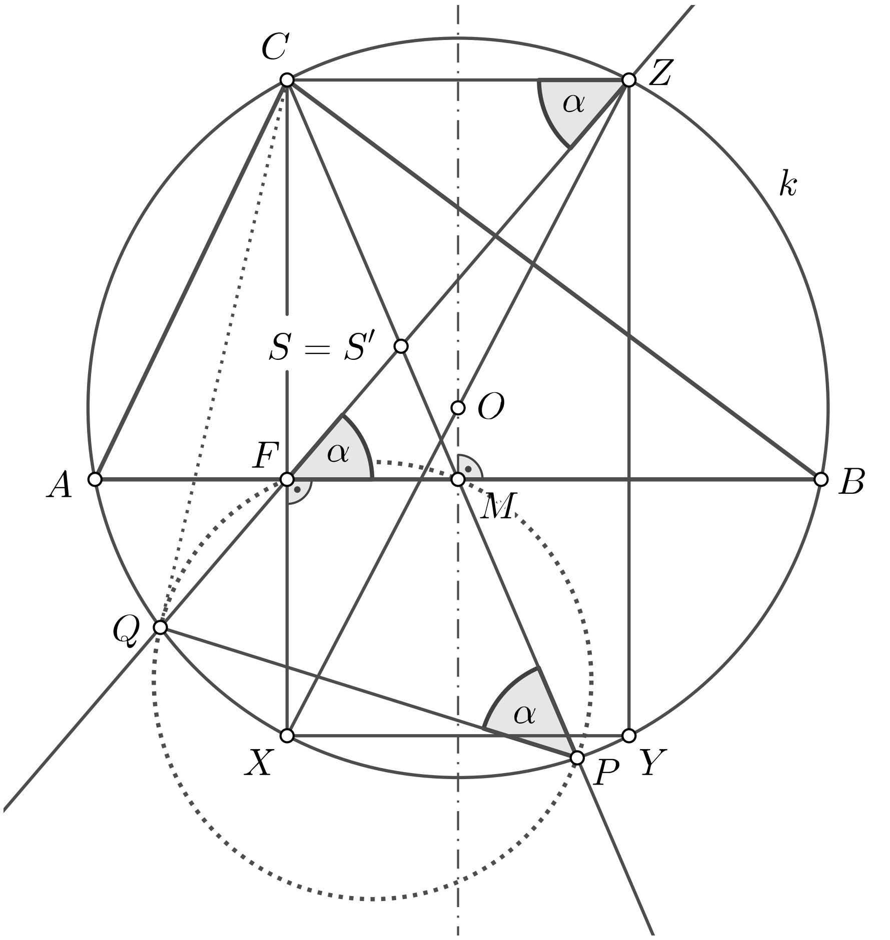


Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

*Lösung 3.* Sei $X$ der zweite Schnittpunkt von $CF$ mit $k$, $Y$ der $C$ im Umkreis gegenüberliegende Punkt und $Z$ der zweite Schnittpunkt der Parallelen zu $AB$ durch $C$ mit $k$. Dann gilt nach Thales $\sphericalangle CZY = \sphericalangle YXC = 90°$ und nach Konstruktion $\sphericalangle ZCX = 90°$, also ist $CXYZ$ ein Rechteck. Weil $k$ sowie die Geraden $CX$ und $YZ$ symmetrisch bezüglich der Streckensymmetrale von $AB$ sind, ist die Streckensymmetrale auch eine Symmetrieachse des Rechtecks $CXZY$. Daraus folgt $\overline{CZ} = 2\overline{FM}$. Weiterhin gilt, dass $FM$ und $CZ$ parallel sind. Sei $S'$ der Schnittpunkt von $ZF$ und $CM$. Dann sind die Dreiecke $S'FM$ und $S'ZC$ ähnlich, und wegen $\overline{CZ} = 2\overline{FM}$ folgt $CS' : S'M = 2:1$. Also ist $S' = S$, d.h. $Z, S, F$ und $Q$ sind kollinear. Mittels Peripheriewinkelsatz und Z-Winkelsatz ergibt sich

$$\sphericalangle MFS = \sphericalangle SZC = \sphericalangle QZC = \sphericalangle QPC = \sphericalangle QPS.$$

Aus $\sphericalangle MFS = \sphericalangle QPS$ folgt wie gewünscht, dass $FQMP$ ein Sehnenviereck ist.

*(Josef Greilhuber)* □

*Lösung 3a.* Anstatt zu zeigen, dass $CS' : S'M = 2 : 1$ gilt, und damit $S'$ der Schwerpunkt ist, kann man auch den SWS-Satz benutzen um zu zeigen, dass die Dreiecke $FMS$ und $ZCS$ ähnlich sind. Dies folgt aus $FM : CZ = MS : CS = 2 : 1$ und $\sphericalangle SMF = \sphericalangle SCZ$. Damit ist auch $\sphericalangle FSM = \sphericalangle ZSC$ und $S$ liegt auf der Geraden $FZ$.

*(Josef Greilhuber)* □

**Aufgabe 3.** *Für eine positive ganze Zahl $n$ betrachten wir das folgende Spiel: Auf einer Tafel stehen zu Beginn die Zahlen $1, 2, \ldots, n$. In jedem Schritt werden zwei Zahlen auf der Tafel ausgewählt, deren Differenz noch auf der Tafel steht. Diese Differenz wird dann von der Tafel gelöscht.*

*(Wenn zum Beispiel auf der Tafel die Zahlen 3, 6, 11 und 17 stehen, dann kann 3 als $6 - 3$ oder 6 als $17 - 11$ oder 11 als $17 - 6$ gelöscht werden.)*

*Für welche $n$ ist es möglich, mit solchen Schritten zu erreichen, dass nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht?*

*(Michael Reitmeir)*

*Antwort.* Es ist genau dann möglich, wenn $n$ eine Zweierpotenz ist.

*Lösung 1.* Wir stellen zunächst fest, dass $n$ niemals eine Differenz von zwei Zahlen sein kann, sodass $n$ die letzte Zahl sein muss.

Um zu zeigen, dass $n$ eine Zweierpotenz sein muss, nehmen wir indirekt an, dass es eine ungerade Primzahl $p$ gibt, die $n$ teilt, und zeigen vom Ende des Prozesses rückwärts mit Induktion, dass $p$ alle Zahlen auf der Tafel teilt.

Am Ende stimmt das natürlich, da $p$ die Zahl $n$ teilt. Wenn wir jetzt als Induktionshypothese annehmen, dass in einem bestimmten Schritt nur mehr Zahlen auf der Tafel stehen, die durch $p$ teilbar sind, müssen wir uns nur mehr überlegen, wie die letzte Zahl gelöscht wurde. War sie die Differenz zweier Zahlen, die noch auf der Tafel stehen, ist sie natürlich auch durch $p$ teilbar. War sie hingegen die Differenz einer Zahl auf der Tafel und sich selbst, muss diese andere Zahl auf der Tafel das Doppelte der Zahl sein, da Null nie auf der Tafel steht. Die Hälfte einer Zahl, die durch $p$ teilbar ist, ist aber ebenfalls durch $p$ teilbar.

Da 1 sicher nicht durch $p$ teilbar ist, erhalten wir den gewünschten Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass Zweierpotenzen immer zum Ziel führen. Dafür bemerken wir, dass es für $n = 1$ selbstverständlich funktioniert und wir für größere Zweierpotenzen zunächst die Paare $(n, 1)$, $(n, 2)$, $\ldots$, $(n, n/2 - 1)$ verwenden, dann auf den Zahlen $1$, $2$, $\ldots$, $n/2$ den Prozess induktiv anwenden bis nur mehr $n/2$ übrig ist, und dann das Paar $(n, n/2)$ verwenden.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

*Lösung 1a.* Lösche zuerst $n/2+1$ bis $n-1$ durch Subtraktion von eins vom noch auf der Tafel stehenden Nachfolger, dann weiter wie in Lösung 1.

*(Clemens Heuberger)* □

*Lösung 2.* Wir zeigen zuerst, dass es unmöglich ist, wenn $n$ keine Zweierpotenz ist.
Klarerweise kann $n$ selbst nie von der Tafel gelöscht werden. Wir gehen rückwärts vor und nehmen an, es stehen nur noch zwei Zahlen auf der Tafel, $x_1 = n$ und eine kleinere Zahl $x_2$. Um $x_2$ von der Tafel zu löschen, muss $n - x_2 = x_2$ und somit $x_2 = \frac{n}{2}$ gelten, was bedeutet, dass $n$ gerade sein muss.

Nun nehmen wir an, es stehen noch drei Zahlen auf der Tafel, $n$, $\frac{n}{2}$ und $x_3$ (wobei $n \geq 4$ ist). Die Zahl $x_3$ kann offensichtlich nicht die Differenz von $n$ und $\frac{n}{2}$ sein, da sie verschieden von $\frac{n}{2}$ ist. Somit ist sie die Hälfte einer der beiden Zahlen, womit nur $x_3 = \frac{n}{4}$ möglich ist, was bedeutet, dass $n$ durch 4 teilbar sein muss.

Für $n \geq 8$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $x_4 = \frac{3n}{4}$ unter den letzen vier Zahlen ist, da wir diese spätestens dann mit $n - \frac{n}{4} = \frac{3n}{4}$ von der Tafel löschen können.

Nun nehmen wir an, es stehen noch 5 Zahlen auf der Tafel, $\frac{n}{4}, \frac{2n}{4}, \frac{3n}{4}, \frac{4n}{4}$ und $x_5$. Wenn $x_5$ die Differenz von zwei der anderen Zahlen ist, muss sie von der Form $\frac{kn}{4}$ sein, da sind aber schon alle Zahlen vergeben. Somit muss $x_5$ die Hälfte einer der anderen Zahlen sein, und damit die Form $x_5 = \frac{kn}{8}$ mit $k$ ungerade sein, weil für gerades $k$ ja bereits alle Werte schon vergeben sind. Somit ist $n$ durch 8 teilbar.

Da $x_5$ von einer der vier anderen Zahlen den Abstand $\frac{1}{8}$ haben muss, dürfen wir annehmen, dass $x_6 = \frac{1}{8}$ ist, da es dann an der Stelle noch immer gelöscht werden kann. Ebenso können wir nun annehmen, dass $x_7$ und $x_8$ die zwei übrigen Zahlen von der Form $\frac{kn}{8}$ sind, da diese mit Hilfe von $x_6$ ebenfalls an dieser Stelle gelöscht werden können.

Diesen Vorgang können wir induktiv weiterführen, solange $n \geq 2^k$ ist, und erhalten damit, dass für $2^k \leq n < 2^{k+1}$ die Zahl $n$ durch $2^k$ teilbar ist und damit $n = 2^k$ ist.

Nun zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass das Ziel immer erreicht werden kann, wenn $n$ eine Zweierpotenz ist.

*Induktionsanfang:* Für $n = 2$ löscht man die Zahl $2 - 1 = 1$ von der Tafel, wodurch nur noch eine Zahl übrig bleibt.

*Induktionsannahme:* Für $n = 2^k$ existieren zwei Teilfolgen $a_1, ..., a_{n-1}$ und $b_1, ..., b_{n-1}$ der Folge $1, ..., n$ mit $a_i > b_i$, sodass mit $a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_{n-1} - b_{n-1}$ in dieser Reihenfolge alle Zahlen bis auf $n$ von der Tafel gelöscht werden können, wobei in jedem Schritt nur $a_i$ und $b_i$ verwendet werden, die noch auf der Tafel stehen.

*Induktionsschritt:* Wir zeigen, dass aus der Induktionsannahme folgt, dass man auch alle Zahlen von 1 bis $2n = 2^{k+1}$ außer $2n$ von der Tafel löschen kann. Hierfür bildet man der Reihe nach die Differenzen $(n + a_i) - b_i$ für $i = 1, ..., n - 1$. Da mit $a_i - b_i$ die Zahlen von 1 bis $n - 1$ gelöscht werden, werden durch dieses „Verschieben um $n$" die Zahlen von $n + 1$ bis $2n - 1$ gelöscht. Nun können mit $a_i - b_i$ für $i = 1, ..., n - 1$ die Zahlen 1 bis $n - 1$ gelöscht werden, es verbleiben nur noch $n$ und $2n$ auf der Tafel. Zuletzt löscht man noch die Zahl $2n - n = n$ von der Tafel, wodurch der Induktionsschritt abgeschlossen und alles bewiesen ist.

*(Michael Reitmeir)* □

*Lösung 2a.* Wie in Lösung 2 überlegt man, dass es unmöglich ist, wenn $n$ keine Zweierpotenz ist.
Nun beweisen wir durch vollständige Induktion, dass man das Ziel immer erreichen kann, wenn $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist.
Für $k = 1$ ist das klar.
Angenommen, es gibt einen Lösungsweg für ein bestimmtes $k \in \mathbb{N}$.
Wir betrachten die Zahlen $1, 2, ..., n = 2^{k+1}$ auf der Tafel. Zunächst kann man durch Bilden von $n - 1, (n-2) - 1, (n-4) - 1, (n-6) - 1, ..., 2 - 1$ alle ungeraden Zahlen löschen. Jetzt stehen noch die Zahlen $2, 4, 6, 8, ..., 2^{k+1}$ auf der Tafel. Man kann nun den Lösungsweg für $k$ auf diese Zahlen übertragen: Wenn in einem Schritt im ursprünglichen Lösungsweg zwei Zahlen $a$ und $b$ mit $a < b$ voneinander subtrahiert werden und $c = b - a$ gelöscht wird, so kann man in der neuen Situation die Zahlen $2a$ und $2b$ voneinander subtrahieren und die Zahl $2b - 2a = 2(b - a)$ löschen. Der zusätzliche Faktor 2 ändert nichts an der Tatsache, dass am Schluss alle Zahlen bis auf eine gelöscht werden.

*(Thomas Speckhofer)* □

**Aufgabe 4.** *Man bestimme alle ganzen Zahlen $z$, die sich in der Form*

$$z = \frac{a^2 - b^2}{b}$$

*darstellen lassen, wobei $a$ und $b$ positive ganze Zahlen sind.*

*(Walther Janous)*

*Antwort.* Alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der Menge $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

*Lösung 1.* Wenn $z$ ungerade ist, dann schreiben wir $z^2 = 4k + 1$ (alle ungeraden Quadratzahlen sind kongruent 1 modulo 4) und setzen $a = k$, $b = k + \frac{1-z}{2}$. Dann gilt

$$(2a)^2 + z^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 = (2b+z)^2 = 4b^2 + 4bz + z^2,$$

was sich zu $z = \frac{a^2-b^2}{b}$ vereinfacht. Wir müssen also nur sicherstellen, dass $a$ und $b$ positive ganze Zahlen sind. Zunächst gilt für $z \neq \pm 1$, dass $4k + 1 = z^2 > 1$, also $a = k > 0$. Für negatives $z$ ist $b > a > 0$. Für positives $z \neq 1$ erhält man $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 > 4k + 1 = z^2$, also $2k + 1 > z$ und $b = \frac{2k+1-z}{2} > 0$. Diese Prozedur funktioniert damit für alle ungeraden $z$ außer $\pm 1$.

Im Fall $z = 8$ ist $a = 3$, $b = 1$ eine Lösung. Im Fall $z = -8$ funktionieren $a = 3$ und $b = 9$. Für $z = 0$ ist $a = b = 1$ eine Lösung.

Alle Zahlen $z \notin \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ können wir als $z = 2^\ell u$ schreiben, wobei $u$ eine der Zahlen ist, für die wir bereits eine Darstellung haben (d.h., $u$ ist entweder gleich 8 oder ungerade und ungleich $\pm 1$). Wir schreiben nun $u = \frac{a^2-b^2}{b}$ und erhalten $z = \frac{(2^\ell a)^2-(2^\ell b)^2}{2^\ell b}$, also ist auch $z$ darstellbar.

Die Fälle $z \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ führen auf die Gleichungen

$$(2a)^2 + 1 = (2b \pm 1)^2, \qquad a^2 + 1 = (b \pm 1)^2, \qquad a^2 + 4 = (b \pm 2)^2,$$

welche allesamt $a = 0$ implizieren, da die Abstände zwischen Quadratzahlen immer größer werden. Die einzigen Quadratzahlen, deren Abstand 1 ist, sind 0 und 1, und die einzigen Quadratzahlen, deren Abstand 4 ist, sind 0 und 4. Also gibt es hier keine Lösungen.

*(Josef Greilhuber)* □

*Lösung 2.* Wir multiplizieren die Gleichung zunächst mit $4b$ und schreiben um:

$$4a^2 = 4b^2 + 4bz.$$

Quadratisches Ergänzen liefert die äquivalente Gleichung

$$(2a)^2 = 4b^2 + 4bz + z^2 - z^2 = (2b+z)^2 - z^2.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$z^2 = (2b+z)^2 - (2a)^2 = (2b + z + 2a)(2b + z - 2a).$$

Wir setzen nun $p = 2b + z + 2a$ und $q = 2b + z - 2a$. Es muss also $pq = z^2$ gelten. Aus den beiden Gleichungen für $p$ und $q$ ergibt sich durch Addition

$$4b + 2z = p + q,$$

also $b = \frac{p+q-2z}{4}$, und durch Subtraktion

$$4a = p - q,$$

also $a = \frac{p-q}{4}$. Wir brauchen also eine Faktorisierung $pq$ von $z^2$, für die $a = \frac{p-q}{4}$ und $b = \frac{p+q-2z}{4}$ positive ganze Zahlen sind. Für diese gilt dann tatsächlich

$$(2b + z + 2a)(2b + z - 2a) = pq = z^2$$

und damit die gewünschte Gleichung.

(a) Für $z = \pm 1$ ist $p = q = \pm 1$ die einzige Möglichkeit, womit sich $a = 0$ ergibt. Daher gibt es in diesem Fall keine solche Darstellung.

(b) Ist $z$ ungerade und $z \neq \pm 1$, dann können wir $p = z^2$ und $q = 1$ wählen, womit sich $a = \frac{z^2-1}{4} = \frac{(z+1)(z-1)}{4}$ und $b = \frac{z^2+1-2z}{4} = \frac{(z-1)^2}{4}$ ergibt. Beide sind offensichtlich positiv, und da $z + 1$ und $z - 1$ gerade sind, sind $a$ und $b$ auch ganzzahlig.

(c) Für $z = \pm 2$ ist $z^2 = 4$, und die einzigen Möglichkeiten für $(p,q)$ sind $(\pm 1, \pm 4)$, $(\pm 2, \pm 2)$ und $(\pm 4, \pm 1)$. In keinem dieser Fälle ist $a = \frac{p-q}{4}$ eine positive ganze Zahl.

(d) Für $z = \pm 4$ ist $z^2 = 16$, und die einzigen Möglichkeiten für $(p,q)$ sind $(\pm 1, \pm 16)$, $(\pm 2, \pm 8)$, $(\pm 4, \pm 4)$, $(\pm 8, \pm 2)$ und $(\pm 16, \pm 1)$. In keinem dieser Fälle ist $a = \frac{p-q}{4}$ eine positive ganze Zahl.

(e) Es sei zuletzt $z$ gerade und $|z| > 4$. Ist $z$ durch 4 teilbar, dann setzen wir $p = \frac{z^2}{4}$ und $q = 4$. Damit sind $a = \frac{p-q}{4} = \frac{z^2-16}{16} = \frac{(z+4)(z-4)}{16}$ und $b = \frac{z^2-8z+16}{16} = \frac{(z-4)^2}{16}$ positive ganze Zahlen, und wir haben wie in Fall (b) eine Darstellung in der gewünschten Form. Ist $z$ nicht durch 4 teilbar, dann setzen wir $p = \frac{z^2}{2}$ und $q = 2$. Damit sind $a = \frac{p-q}{4} = \frac{z^2-4}{8} = \frac{(z+2)(z-2)}{8}$ und $b = \frac{z^2-4z+4}{8} = \frac{(z-2)^2}{8}$ positive ganze Zahlen, und wir haben wiederum eine Darstellung in der gewünschten Form.

*(Stephan Wagner)* □