55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

27. April 2024

Aufgabe 1. *Es seien α und β reelle Zahlen mit $\beta \neq 0$. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass*

$$f(\alpha f(x) + f(y)) = \beta x + f(y)$$

für alle reellen x und y gilt.

(Walther Janous)

Antwort. Die Funktionalgleichung besitzt nur für $\alpha = \beta$ Lösungen, und zwar

- für $\alpha = \beta = -1$ die Funktionen $f(x) = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ und
- für $\alpha = \beta \neq 0, -1$ die Funktion $f(x) = x$.

Lösung 1. Wir stellen zuerst fest, dass die Funktion f injektiv ist, denn für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = f(b)$ sehen wir, dass die Gleichung für $x = a$ und $x = b$ dieselbe linke Seite hat. Somit sind die rechten Seiten gleich und aus $\beta a = \beta b$ folgt wegen $\beta \neq 0$ sofort $a = b$ wie gewünscht.

Wir setzen nun in der Gleichung $x = 0$, entfernen wegen der Injektivität das äußere f und erhalten $f(y) = y + C$ für eine Konstante C.

Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung ergibt

$$\alpha x + y + \alpha C + 2C = \beta x + y + C$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Das ist äquivalent zu $\alpha = \beta$ (Koeffizient von x) und $(1 + \alpha)C = 0$ (konstanter Koeffizient).

Somit gibt es keine Lösungen für $\alpha \neq \beta$ und für $\alpha = 0$. Für $\alpha = \beta \notin \{0, -1\}$ erhält man $C = 0$ und damit die Lösung $f(x) = x$ und für $\alpha = \beta = -1$. erhält man $f(x) = x + C$ für eine beliebige Konstante C.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Sei im Weiteren $C = f(0)$. Für $y = x$ erhalten wir

$$f((\alpha + 1)f(x)) = \beta x + f(x). \qquad (*)$$

- Für $\alpha = -1$ ergibt sich daraus $f(0) = \beta x + f(x)$, d.h. $f(x) = C - \beta x$, $x \in \mathbb{R}$. Mithilfe der Probe erhalten wir einerseits

  $$f(f(y) - f(x)) = f(\beta x - \beta y) = C - \beta^2 x + \beta^2 y$$

  und andererseits

  $$\beta x + f(y) = C + \beta x - \beta y.$$

  Folglich muss

  $$(\beta^2 + \beta)x = (\beta^2 + \beta)y$$

  für alle reellen Zahlen x und y gelten. Deshalb ergibt sich $\beta^2 + \beta = 0$, d.h. $\beta = -1$, mit den Lösungsfunktionen $f(x) = C + x$, $x \in \mathbb{R}$, wobei C eine beliebige reelle Zahl ist..

- Für $\alpha \neq -1$ liefert $(*)$ für $x = 0$, dass
$$f((\alpha+1)C) = C. \qquad (**)$$
Wir ersetzen nun in $(*)$ x durch $(\alpha+1)f(x)$ und erhalten
$$f((\alpha+1)f((\alpha+1)f(x))) = \beta(\alpha+1)f(x) + f((\alpha+1)f(x)),$$
d.h. (mit Hilfe von $(*)$)
$$f((\alpha+1)(\beta x + f(x)) = \beta(\alpha+1)f(x) + \beta x + f(x).$$
Mit $x = 0$ folgt daraus
$$f((\alpha+1)C) = \beta(\alpha+1)C + C.$$
Wegen $(**)$ gilt deshalb $C = \beta(\alpha+1)C + C$, also $\beta(\alpha+1)C = 0$, und damit $C = 0$, d.h. $f(0) = 0$. Für $y = 0$ folgt damit aus unserer Funktionalgleichung
$$f(\alpha f(x)) = \beta x. \qquad (***)$$
Für $\alpha = 0$ ergäbe sich $\beta x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, was aber auf $\beta = 0$ führen würde. Deshalb muss $\alpha \neq 0$ sein. Aus $(***)$ folgt aber, dass f sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv ist. Unsere Funktionalgleichung lautet für $x = 0$ und alle $y \in \mathbb{R}$
$$f(f(y)) = f(y).$$
Daraus folgt $f(y) = y$, $y \in \mathbb{R}$. Schließlich führt die Probe wegen $f(\alpha f(x) + f(y)) = \alpha x + y$ und $\beta x + f(y) = \beta x + y$ zu $\alpha x = \beta x$, $x \in \mathbb{R}$, also $\alpha = \beta$. Das bedeutet: Für $\alpha = \beta \neq 0, -1$ haben wir $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, als Lösungsfunktion.

Zusammenfassung: Unsere Funktionalgleichung besitzt nur für $\alpha = \beta$ Lösungen, und zwar

- für $\alpha = \beta = -1$ die Funktionen $f(x) = x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ und
- für $\alpha = \beta \neq 0, -1$ die Funktion $f(x) = x$.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Setzt man $y = 0$, so sieht man wegen $\beta \neq 0$, dass f surjektiv ist. Daher kann man $f(y)$ durch $z \in \mathbb{R}$ ersetzen und erhält
$$f(\alpha f(x) + z) = \beta x + z$$
für $z \in \mathbb{R}$. Ersetzt man noch x durch 0 und z durch $z - \alpha f(0)$, so erhält man $f(z) = z - \alpha f(0)$, also $f(z) = z + C$ für eine Konstante C und $z \in \mathbb{R}$. Weiter wie in den anderen Lösungen.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 2. *Es sei h ein Halbkreis über der Strecke AB. Die zwei Kreise k_1 und k_2, $k_1 \neq k_2$, berühren die Strecke AB in den Punkten C bzw. D sowie den Halbkreis h von innen in den Punkten E bzw. F. Man beweise, dass die vier Punkte C, D, E und F auf einem Kreis liegen.*

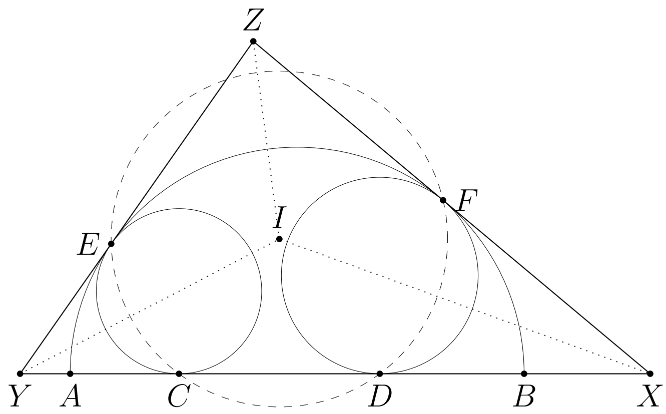
(Walther Janous)

Lösung 1. Wir betrachten zunächst den Fall, dass C und D beide nicht der Mittelpunkt von AB sind, sodass die Tangenten in C und D beide nicht parallel zu AB sind.

Die Tangente in E schneide AB in X, die Tangente in F schneide AB in Y und die beiden Tangenten schneiden einander in Z. Es sei nun I der Schnittpunkt der Winkelsymmetralen von $\sphericalangle XYZ$ und $\sphericalangle ZXY$. Da die Tangentenabschnitte XC und XE an k_1 gleichlang sind und C, E auf den Schenkeln des Winkels $\sphericalangle ZXY$ liegen, sind C und E von I gleichweit entfernt.

Analog gilt das für D und F mit dem Kreis k_2 sowie E und F mit dem Halbkreis h.

Damit liegen die vier Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt I.



Im verbleibenden Spezialfall, dass etwa k_1 durch den Mittelpunkt von AB geht. können wir noch immer Y als Schnittpunkt der Tangente in F mit AB sowie Z als Schnittpunkt der Tangenten in E und F definieren. Wir definieren I als Schnittpunkt der Winkelsymmetralen von $\sphericalangle ZYD$ und $\sphericalangle EZY$. Es gilt daher, dass I denselben Abstand zu DY und YZ hat, sowie denselben Abstand zu EZ und YZ hat. Damit hat I auch denselben Abstand zu den parallelen Geraden DY und EZ. Somit liegt I auf der Streckensymmetrale von CE und es gilt wie gewünscht $IC = IE$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Es seien M der Mittelpunkt von h und M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2. Da die Kreise k_1 und k_2 den Durchmesser AB von h in C bzw. D berühren, gilt $\sphericalangle M_1CA = \sphericalangle M_2DA = 90°$.

Nun sind die Dreiecke M_1EC, M_2DF und MFE sicher gleichschenkelig, und es gilt somit $\sphericalangle M_1CE = \angle CEM_1$, $\angle FDM_2 = \sphericalangle M_2FD$ und $\angle EFM = \sphericalangle MEF$. Wir erkennen somit im Viereck $CDFE$, dass

$$\begin{aligned}\sphericalangle DCE + \sphericalangle EFD &= \sphericalangle DCM_1 + \sphericalangle M_1CE + \sphericalangle EFM + \sphericalangle M_2FD \\ &= \sphericalangle M_2DC + \sphericalangle CEM_1 + \sphericalangle MEF + \sphericalangle FDM_2 \\ &= \sphericalangle CEF + \sphericalangle FDC\end{aligned}$$

gilt, womit $CDFE$ ein Sehnenviereck ist.

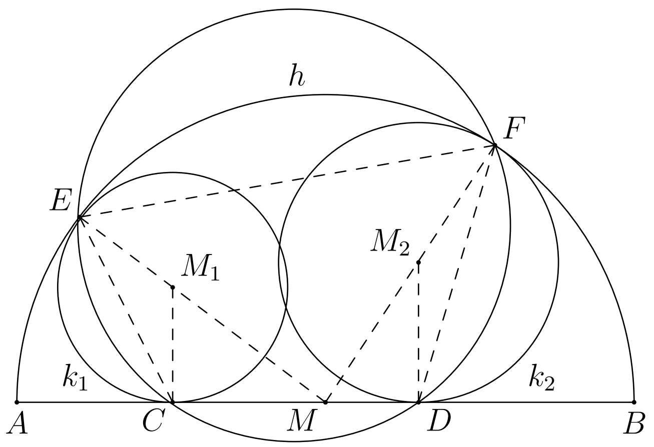
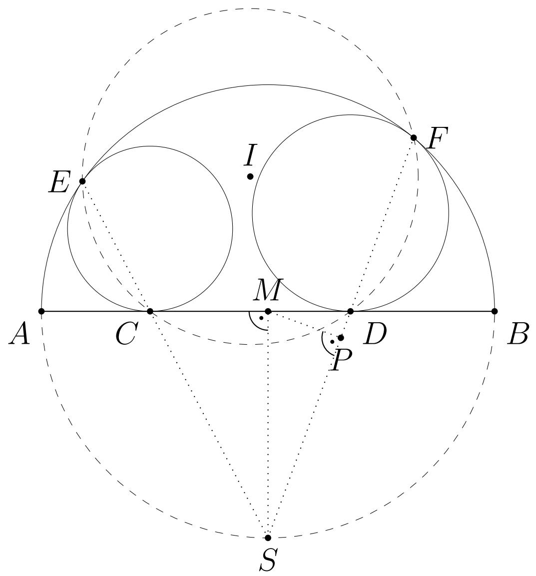


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 2

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wir betrachten zuerst die zentrische Streckung im Berührpunkt E von k_1 mit h, die den Kreis k_1 in den Kreis überführt, dessen obere Hälfte h ist. Da diese Streckung M_1 in M überführt, und AB die Tangente an k_1 in C ist, erkennt man, dass diese Streckung den Punkt C in den Südpol des großen Kreises überführt, also in den Punkt S, in dem die Tangente parallel zu AB ist.

Analog, ist dies auch der Fall für die zentrische Streckung aus F, die k_2 in den großen Kreis überführt. Wir sehen also, dass sich die Geraden EC und FD in S schneiden.



Nun sei P der Mittelpunkt von FS. Da das Dreieck MSF gleichschenkelig mit $MS = MF$ ist, ist das Dreieck MSP rechtwinkelig in P. Ebenso ist das Dreieck MSD rechtwinkelig in M, und da diese Dreiecke den Winkel in S gemein haben, sind sie ähnlich. Wir erhalten also

$$\frac{PS}{MS} = \frac{MS}{DS} \iff \frac{FS/2}{MS} = \frac{MS}{DS} \iff FS \cdot DS = 2 \cdot MS^2.$$

Vollkommen analog können wir auch im Dreieck MES zeigen, dass $ES \cdot CS = 2 \cdot MS^2$ gilt, womit wir $FS \cdot DS = ES \cdot CS$ erhalten.

Wir sehen, dass der Südpol S dieselbe Potenz bezüglich der Punktepaare (C, E) und (D, F) hat, womit das Viereck $ECDF$ ein Sehnenviereck ist.

(Theresia Eisenkölbl, Robert Geretschläger) □

Aufgabe 3. *Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Ein* Kreistanz *ist ein Tanz, der nach folgender Vorschrift durchgeführt wird: Am Boden werden entlang eines großen Kreises n Punkte in gleichen Abständen markiert. Bei jedem dieser Punkte liegt ein Blatt Papier mit einem Pfeil, der entweder in oder gegen den Uhrzeigersinn zeigt. Einer der Punkte ist mit „Start“ beschriftet. Der Tänzer beginnt an diesem Punkt. In jedem Schritt wechselt er zuerst die Richtung des Pfeiles, bei dem er steht, und geht dann zum nächsten Punkt in der neuen Pfeilrichtung.*

a) Man zeige: Jeder Kreistanz besucht jeden Punkt unendlich oft.

b) Wie viele verschiedene Kreistänze gibt es? Zwei Kreistänze werden als gleich betrachtet, wenn sie sich nur durch endlich viele Schritte zu Beginn unterscheiden und dann für immer dieselben Punkte in derselben Reihenfolge besuchen. (Die gemeinsame Schrittfolge darf dabei in den beiden Tänzen zu verschiedenen Zeitpunkten beginnen.)

(Birgit Vera Schmidt)

Lösung 1.

Lemma. Wenn vor einem Richtungswechsel genau $k < n$ Schritte hintereinander in dieselbe Richtung getanzt wurden, werden nach dem Richtungswechsel mindestens $k + 1$ Schritte in die andere Richtung getanzt.

Beweis. Beweis: Nachdem der Tänzer k Schritte in eine Richtung getanzt ist und nun die Richtung wechselt, geht er zunächst einen Schritt in die Gegenrichtung. Dann hat er aufgrund der k vorigen Schritte k Pfeile vor sich, die im entgegenschauen, sodass er auf jeden Fall noch k weitere Schritte in die Gegenrichtung macht. ■

Das bedeutet, dass der Tänzer nach spätestens n Richtungswechseln n Schritte in dieselbe Richtung tanzt. Somit betritt er mit dem n-ten Schritt das erste Feld dieser Schrittfolge, dreht den dortigen Pfeil um und hat somit nur mehr $n-1$ Pfeile vor sich, die ihm entgegenschauen, sodass er wieder nur n Schritte in dieselbe Richtung machen kann.

Somit läuft ab dann jeder Tanz so ab, dass es einen „Wendepunkt" gibt. Der Tänzer dreht von dort eine ganze Runde im Uhrzeigersinn, dann eine ganze Runde gegen den Uhrzeigersinn, und so weiter.

Durch geeignete Wahl der Pfeilrichtungen zu Beginn kann jeder Punkt zum Wendepunkt werden, zum Beispiel, indem beginnend beim Startpunkt und folgend gegen den Uhrzeigersinn bis zum gewünschten Wendepunkte alle Pfeile im Uhrzeigersinn sind und alle anderen gegen den Uhrzeigersinn.

Somit gibt es n verschiedene Tänze. Bei jedem davon wird jeder Punkt unendlich oft besucht.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Teil a) allein kann auch wie folgt gezeigt werden: Nach Schubfachschluss gibt es mindestens einen Punkt, der unendlich oft besucht wird. Angenommen, es gäbe einen anderen Punkt, der nur endlich oft besucht wird. Dann existieren auch irgendwo zwei benachbarte Punkte, von denen einer unendlich oft und der andere endlich oft besucht wird. Das ist aber nicht möglich, da der Tänzer den Punkt, der unendlich oft besucht wird, immer abwechselnd in die beiden Richtungen verlässt, und daher auch beide Nachbarpunkte unendlich oft besucht.

(Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 4. *Eine positive ganze Zahl heißt* mächtig*, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung alle Exponenten* ≥ 2 *sind.*

Man beweise, dass es unendlich viele Paare mächtiger aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen gibt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Die Zahlen $8 = 2^3$ und $9 = 3^2$ bilden ein Paar aufeinanderfolgender mächtiger Zahlen.

Wir zeigen nun, dass man zu jedem Paar $(k, k+1)$ mächtiger positiver ganzer Zahlen ein neues Paar finden kann, nämlich das Paar $(4k(k+1), (2k+1)^2)$. Offensichtlich ist $4k(k+1)+1 = (2k+1)^2$. Da k und $k+1$ mächtig sind, ist es auch das Produkt $4k(k+1) = 2^2k(k+1)$. Und ein Quadrat ist sicherlich mächtig, also insbesondere $(2k+1)^2$. Schließlich ist $4k(k+1) > k$ für positive ganze Zahlen k. Damit gibt es unendlich viele Paare mächtiger aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir betrachten die Pellsche Gleichung

$$x^2 - 8y^2 = 1.$$

Jede Lösung (x, y) mit positiven ganzen Zahlen führt zu einem Paar mächtiger aufeinanderfolgender Zahlen $(8y^2, x^2)$.

Die Pellsche Gleichung hat offensichtlich die Lösung $(3, 1)$, was zum mächtigen Paar $(8, 9)$ führt.

Wenn wir nun $(x_n, y_n) \in \mathbb{N}^2$ durch die Gleichung $x_n + \sqrt{8}y_n = (3+\sqrt{8})^n$ festlegen, gilt natürlich auch $x_n - \sqrt{8}y_n = (3-\sqrt{8})^n$ und damit auch das Produkt

$$(x_n + \sqrt{8}y_n)(x_n - \sqrt{8}y_n) = (3+\sqrt{8})^n(3-\sqrt{8})^n$$

und damit

$$x_n^2 - 8\ y_n^2 = (9-8)^n = 1.$$

Somit ist jedes Paar $(8y_n^2, x_n^2)$ ein Paar mächtiger aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen.

Diese Paare sind offensichtlich alle verschieden, sodass wir unendlich viele Lösungen erhalten.

(Theresia Eisenkölbl) □