54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

29. April 2023

Aufgabe 1. *Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und $a + b + c + d = 2$. Man zeige, dass*

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \leq \frac{ac+bd}{2}.$$

Gibt es unendlich viele Gleichheitsfälle?

(Josef Greilhuber)

Lösung 1. Wir quadrieren die Ungleichung und multiplizieren mit dem Faktor 16:

$$(2-2a)(2-2b)(2-2c)(2-2d) \leq 4(ac+bd)^2.$$

Danach ersetzen wir 2 viermal durch $a + b + c + d$ und erhalten die (homogenisierte) Ungleichung

$$(b+d-(a-c))(a+c-(b-d))(b+d+a-c)(a+c+b-d) \leq 4(ac+bd)^2.$$

Schrittweises Ausmultiplizieren der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned}
&(b+d-(a-c))\,(a+c-(b-d))\,(b+d+a-c)\,(a+c+b-d) \\
&= \big((a+c)^2-(b-d)^2\big)\big((b+d)^2-(a-c)^2\big) \\
&= \big(2ac+2bd+a^2+c^2-b^2-d^2\big)\,\big(2ac+2bd-a^2-c^2+b^2+d^2\big) \\
&= 4\,(ac+bd)^2-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2 \leq 4\,(ac+bd)^2\,,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ (und die Nebenbedingung $a + b + c + d = 2$) eintritt. Das ist insbesondere für $a = b$ und $c = d = 1 - a$ mit $0 < a < 1$ erfüllt, also sicherlich für unendlich viele Fälle.

(Josef Greilhuber) □

Lösung 2. Nach der geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung gilt

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} = \sqrt{((1-a)(1-c))((1-b)(1-d))} \leq \frac{(1-a)(1-c)+(1-b)(1-d)}{2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $(1-a)(1-c) = (1-b)(1-d)$. Es gilt

$$\frac{(1-a)(1-c)+(1-b)(1-d)}{2} = \frac{2-a-c-b-d+ac+bd}{2} = \frac{ac+bd}{2}$$

wie gewünscht.

Gleichheit gilt also genau dann, wenn

$$-a-c+ac = -b-d+bd$$

und $a + b + c + d = 2$. Das ist insbesondere für $a = b$ und $c = d = 1 - a$ mit $0 < a < 1$ erfüllt, also sicherlich für unendlich viele Fälle.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Wir substituieren $(x, y, z, w) := (1 - a, 1 - b, 1 - c, 1 - d)$, erhalten $0 < x,\ y,\ z,\ w < 1$ und aus der Nebenbedingung $2 = a + b + c + d = 4 - (x + y + z + w)$, also $x + y + z + w = 2$. Außerdem gilt

$$ac + bd = (1 - x)(1 - z) + (1 - y)(1 - w) = (1 - x - z + xz) + (1 - y - w + yw) = xz + yw,$$

sodass die zu zeigende Ungleichung

$$\sqrt{xyzw} \leq \frac{xz + yw}{2}$$

lautet, was direkt aus der AGMU für xz und yw folgt.

Gleichheit gilt genau für $xz = yw$ und $x + y + z + w = 2$, was zum Beispiel für $x = y$, $z = w$ und $x + z = 1$ erfüllt ist. Dies ergibt unendlich viele Gleichheitsfälle $(t, t, 1 - t, 1 - t)$ für reelle Zahlen $0 < t < 1$. (Das sind allerdings nicht alle Lösungen.)

(Moritz Hiebler) □

Lösung 3. Wir verwenden folgende Tatsachen:

- Wenn a, b, c und d Seiten eines Vierecks sind, so lässt sich aus ihnen (in dieser Reihenfolge) ein konvexes Sehnenviereck bilden.
- Der Flächeninhalt F eines Sehnenvierecks lässt sich mit

  $$F = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$$

  bestimmen, wobei $s = (a + b + c + d)/2$ ist. (Formel von Brahmagupta)
- Für jedes konvexe Viereck mit Diagonalen e und f, die einander unter dem Winkel ψ schneiden, gilt

  $$F = \frac{ef \sin \psi}{2}.$$

- In jedem Sehnenviereck gilt $ac + bd = ef$. (Satz von Ptolemäus)

Damit erhalten wir, dass sich unsere Ungleichung (mit $s = 1$) als

$$F \leq \frac{ef}{2}$$

interpretieren lässt. Wegen $\sin \psi \leq 1$ ist dies aber klar. Außerdem ergibt sich genau dann Gleichheit, wenn $\sin \psi = 1$, d.h. $\psi = 90°$ gilt, also die Diagonalen des Sehnenvierecks orthogonal sind. Insbesondere erhält man für $a = b$ und $c = d = 1 - a$ (mit $0 < a < 1$) orthogonale Diagonalen, da in diesen Fällen ein Deltoid vorliegt. Demnach gibt es unendlich viele Gleichheitsfälle.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Punkt P liege auf der Verlängerung von BC über B hinaus, sodass $BP = BA$. Der Punkt Q liege auf der Verlängerung von BC über C hinaus, sodass $CQ = CA$.*

Man beweise, dass der Umkreismittelpunkt O des Dreiecks APQ auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$ liegt.

(Karl Czakler)

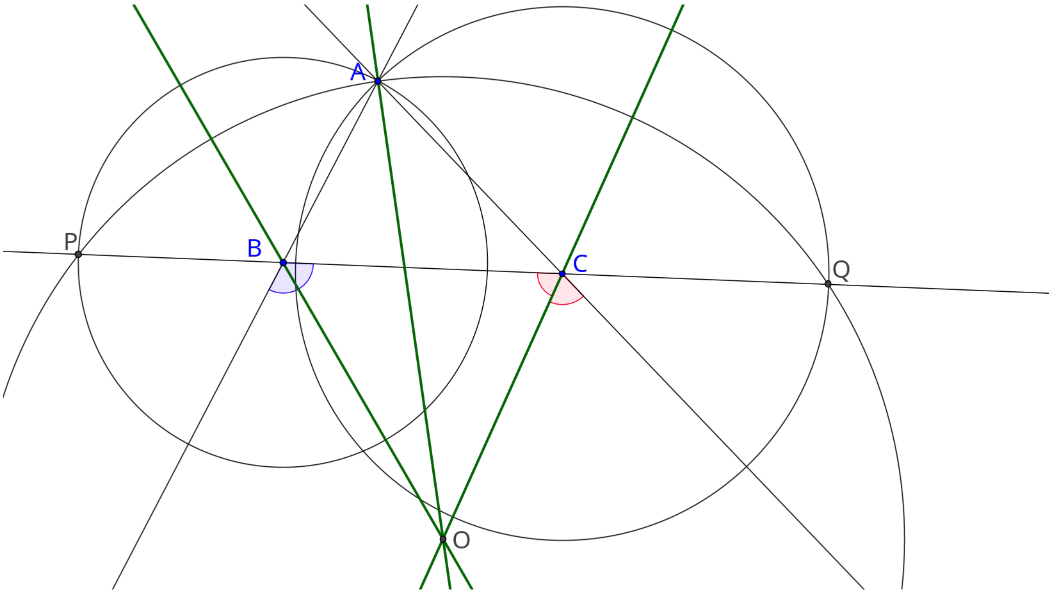

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Das Dreieck ACQ ist laut Angabe gleichschenkelig mit Scheitel in C. Daher ist die Streckensymmetrale von AQ die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle QCA$. Diese Streckensymmetrale geht aber natürlich auch durch den Umkreismittelpunkt O des Dreiecks APQ.

Somit liegt O auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle QCA$. Das ist aber nach Definition von Q die Außenwinkelsymmetrale von $\sphericalangle ACB$.

Analog liegt O auch auf der Außenwinkelsymmetrale von $\sphericalangle CBA$. Als Schnittpunkt der beiden Außenwinkelsymmetralen ist O aber der Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC an der Seite BC. Somit liegt O auch auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$ wie verlangt.

(Theresia Eisenkölbl) □

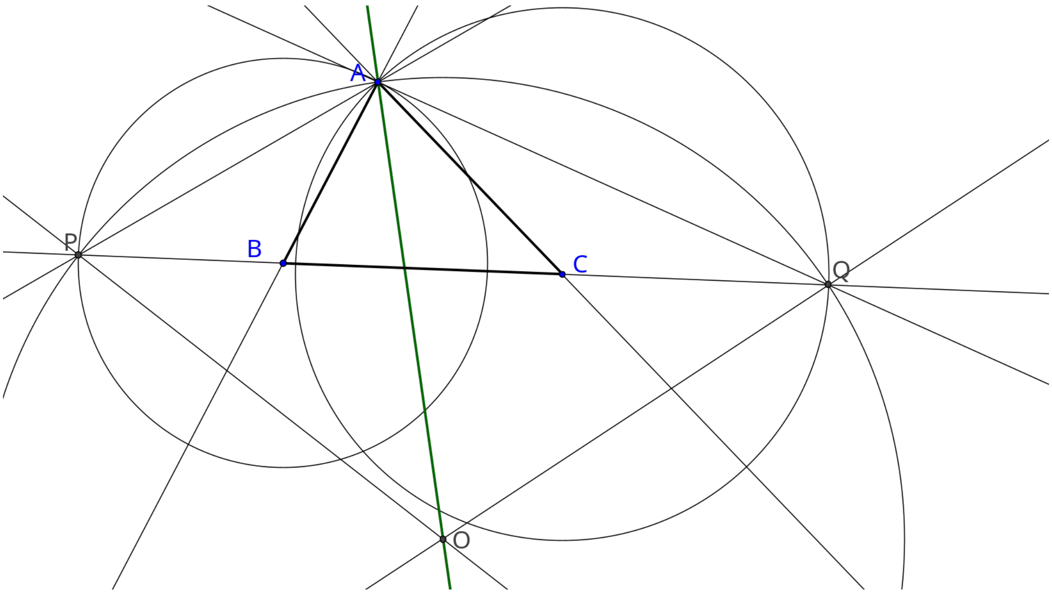

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Lösung 2. Wir möchten den Winkel $\sphericalangle OAC$ ausrechnen. Wir bezeichnen wie üblich die Winkel im Dreieck ABC mit α, β und γ.

Dazu stellen wir zuerst fest, dass im gleichschenkeligen Dreieck QAC der Scheitelwinkel bei C offensichtlich $180^\circ - \gamma$ ist und damit die Basiswinkel jeweils $\gamma/2$ sind. Analog sind die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck APB jeweils $\beta/2$.

Damit können wir unter Verwendung der Gleichschenkeligkeit von QAO sowie des Zentriwinkelsatzes für den Umkreis von APQ mit Zentrum O rechnen:

$$\begin{aligned}\sphericalangle OAC = \sphericalangle OAQ - \sphericalangle CAQ = (180^\circ - \sphericalangle QOA)/2 - \gamma/2 = 90^\circ - \sphericalangle QPA - \gamma/2 \\ = 90^\circ - \sphericalangle BPA - \gamma/2 = 90^\circ - \beta/2 - \gamma/2 = \alpha/2\end{aligned}$$

wie gewünscht.

(Theresia Eisenkölbl) □

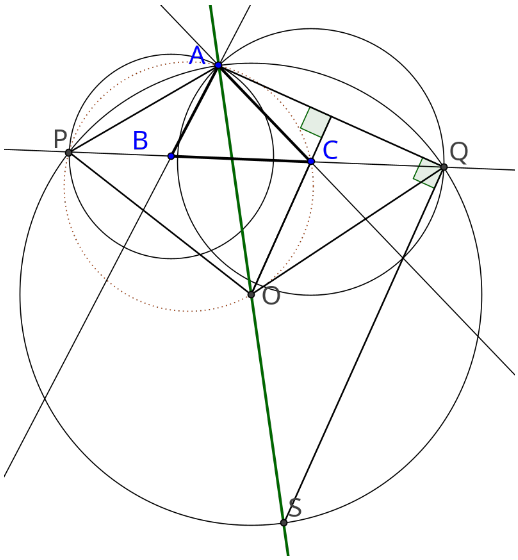

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

Lösung 3. Der Schnittpunkt von AO mit dem Umkreis des Dreiecks APQ sei S. Wegen $CQ = CA$ und $OQ = OA$ steht die Gerade CO normal auf AQ. Mit dem Satz von Thales steht auch die Gerade SQ normal auf AQ, also ist SQ parallel OC und es gilt

$$\angle QSA = \angle COA.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\angle QSA = \angle QPA = \angle CPA.$$

Also haben wir

$$\angle COA = \angle CPA$$

und es folgt, dass die Punkte A, P, O und C ein Sehnenviereck bilden. Wieder mit dem Peripheriewinkelsatz folgt

$$\angle OAC = \angle OPC = \angle OPQ.$$

Analog zeigt man, dass die Punkte A, B, O und Q auf einem Kreis liegen und daher

$$\angle BAO = \angle BQO = \angle PQO$$

gilt. Da aber das Dreieck PQO gleichschenkelig ist, folgt

$$\angle BAO = \angle PQO = \angle OPQ = \angle OAC$$

und die Behauptung ist bewiesen.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 3. *Gegeben ist eine positive ganze Zahl n. Welcher Anteil der nichtleeren Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ hat ein ungerades kleinstes Element?*

(Birgit Vera Schmidt)

Lösung 1. Für jedes k mit $1 \leq k \leq 2n$ ist die Anzahl der Teilmengen, die k als kleinstes Element haben, gleich 2^{2n-k}. (Jedes Element größer als k kann entweder enthalten oder nicht enthalten sein.)

Die Anzahl U der Teilmengen mit einem ungeraden kleinsten Element ist somit

$$U = 2^{2n-1} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^3 + 2^1 = 2 \cdot (4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4^1 + 4^0).$$

Die Anzahl G der Teilmengen mit einem geraden kleinsten Element ist

$$G = 2^{2n-2} + 2^{2n-4} + \cdots + 2^2 + 2^0 = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \cdots + 4^1 + 4^0.$$

Daraus folgt $U = 2G$ und der gesuchte Anteil ist $2/3$.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Es sei $1 \leq k < n$. Es bezeichne G_{2k} die Menge der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit $2k$ als minimales Element und U_{2k-1} die Menge der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit $2k-1$ als minimales Element. Es wird mittels entsprechenden Abbildungen gezeigt, dass

$$|U_{2k-1}| = 2|G_{2k}|$$

gilt. Aus dieser Beziehung folgt, dass auch insgesamt die Anzahl der Teilmengen mit einem ungeraden minimalen Element doppelt so groß ist wie die jener Teilmengen mit einem geraden minimalem Element. Der gesuchte Anteil ist daher $2/3$.

Wir bezeichnen weiters mit U'_{2k-1} jene Mengen aus U_{2k-1}, die das Element $2k$ enthalten und mit U''_{2k-1} jene Mengen aus U_{2k-1}, die das Element $2k$ nicht enthalten. Offensichtlich sind U'_{2k-1} und G_{2k} gleichmächtig, da die Abbildung

$$U'_{2k-1} \to G_{2k}, \quad A \mapsto A \setminus \{2k-1\}$$

eine Bijektion ist. Ebenso sind die Mengen U''_{2k-1} und G_{2k} gleichmächtig, da auch die Abbildung

$$U''_{2k-1} \to G_{2k}, \quad A \mapsto (A \setminus \{2k-1\}) \cup \{2k\}$$

eine Bijektion ist.

Die Mengen U'_{2k-1} und U''_{2k-1} sind disjunkt. Es gilt daher

$$|U_{2k-1}| = |U'_{2k-1}| + |U''_{2k-1}| = |G_{2k}| + |G_{2k}| = 2|G_{2k}|,$$

was zu zeigen war.

(Michael Drmota) □

Lösung 2a. Wir zeigen die Behauptung etwas allgemeiner mit Induktion über n für die Grundmenge $\{2a+1, 2a+2, \ldots, 2a+2n\}$, wobei das für jedes n für alle $a \in \mathbb{Z}$ gelten soll.

Für $n = 1$ trifft die Behauptung für $\{2a+1\}$, $\{2a+2\}$ und $\{2a+1, 2a+2\}$ natürlich zu, dass $2/3$ davon als kleinstes Element eine ungerade Zahl haben.

Sei die Behauptung nun schon für ein $n > 0$ bewiesen. Wir wollen sie nun auch für $n+1$ beweisen.

Jede Teilmenge von $\{2a+1, 2a+2, \ldots, 2a+2n+2\}$ ist von einer der vier Formen

(a) $\{2a+1\} \cup T$ mit $T \subseteq \{2a+3, 2a+4, \ldots, 2a+2n+2\}$.

(b) $\{2a+2\} \cup T$ mit $T \subseteq \{2a+3, 2a+4, \ldots, 2a+2n+2\}$.

(c) $\{2a+1, 2a+2\} \cup T$ mit $T \subseteq \{2a+3, 2a+4, \ldots, 2a+2n+2\}$.

(d) $T \subseteq \{2a+3, 2a+4, \ldots, 2a+2n+2\}$ mit $T \neq \emptyset$.

Die Mengen der drei Formen (a), (b) und (c) treten natürlich gleich oft auf, und es haben genau die Mengen in zwei der drei Fälle, nämlich (a) und (c) ein ungerade kleinstes Element, sodass unter diesen genau 2/3 ein ungerades kleinstes Element haben.

Unter den Mengen der Form (d) haben nach Induktionsvoraussetzung für n (mit $a+1$ statt a) genau 2/3 ein ungerades kleinstes Element. Damit stimmt die Behauptung auch für $n+1$ und wir sind fertig.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2b. Den Induktionsbeweis kann man auch so führen, dass man die drei Mengen betrachtet, in denen $2n-1$ oder $2n$ das kleinste Element ist, von denen tatsächlich genau 2 ein ungerades kleinstes Element haben.

Dann weiß man nach Induktionsvoraussetzung, dass die Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ die gewünschte Eigenschaft hat und muss zu jeder Teilmenge noch eine der vier Teilmengen von $\{2n-1, 2n-2\}$ hinzufügen, was das Verhältnis von geraden und ungeraden kleinsten Elementen nicht ändert.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Paare positiver ganzer Zahlen (n, k), für die*

$$n! + n = n^k$$

gilt.

(Michael Reitmeir)

Antwort. Die einzigen Lösungen sind $(2, 2), (3, 2)$ und $(5, 3)$.

Lösung 1. Da $n! + n > n$ ist, sehen wir sofort, dass $k \geq 2$ sein muss. Dividieren wir auf beiden Seiten der Gleichung durch n, bleibt

$$(n-1)! + 1 = n^{k-1}.$$

Da $(n-1)!$ gerade ist für $n \geq 3$, ist in dem Fall die linke Seite und damit auch n ungerade. Wir überprüfen $n = 1$, 2, 3, 5 und erhalten die Lösungen $(2, 2), (3, 2)$ und $(5, 3)$.

Ab nun sei $n \geq 7$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (n-1)! &= n^{k-1} - 1 \\ &= (1 + n + n^2 + \cdots + n^{k-2})(n-1) \\ \Longrightarrow \qquad (n-2)! &= 1 + n + n^2 + \cdots + n^{k-2}. \end{aligned}$$

Da n ungerade und größer als 6 ist, ist $n-1$ gerade und größer als 2, also keine Primzahl. Außerdem ist $n-1$ auch kein Quadrat einer Primzahl, da 4 das einzige gerade Primzahlquadrat und $n-1 \geq 6$ ist. Somit können wir $n-1$ schreiben als $n-1 = ab$ mit $1 < a, b < n-1$ und $a \neq b$. Folglich enthält $(n-2)!$ sowohl a als auch b als separaten Faktor und ist daher durch $ab = n-1$ teilbar, also $(n-2)! \equiv 0 \bmod (n-1)$. Weiters ist $n \equiv 1 \bmod (n-1)$, und somit

$$0 \equiv 1 + 1 + 1^2 + \cdots + 1^{k-2} \equiv k - 1 \bmod (n-1).$$

Also ist $k-1$ durch $n-1$ teilbar, wir schreiben $k-1 = l(n-1)$ für eine positive ganze Zahl l. Die Fälle $k = 1$ und somit $l = 0$ haben wir bereits ausgeschlossen. Daher gilt jedenfalls $k - 1 \geq n - 1$.

Es ist jedoch

$$(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) < \underbrace{(n-1) \cdot (n-1) \cdots (n-1)}_{n-1 \text{ mal}} = (n-1)^{n-1},$$

und somit
$$n^{k-1} = (n-1)! + 1 \leq (n-1)^{n-1} < n^{n-1} \leq n^{k-1},$$
was einen Widerspruch ergibt. Also kann es keine weiteren Lösungen geben.

(Michael Reitmeir) □

Lösung 2. Wir dividieren durch n und erhalten die äquivalente Gleichung
$$(n-1)! + 1 = n^{k-1}.$$
Wir zeigen zuerst, dass n eine Primzahl sein muss. Angenommen n wäre keine Primzahl. Da $n = 1$ offensichtlich keine Lösung ergibt, können wir n schreiben als $n = ab$ für ganze Zahlen a, b mit $1 < a, b < n$. Also ist $1 < a \leq n-1$, somit gilt $a \mid (n-1)!$. Folglich ist $a > 1$ teilerfremd zur linken Seite $(n-1)! + 1$, aber a teilt die rechte Seite n^{k-1}. Also kann ein solches n keine Lösung der Gleichung sein.

Die Fälle $n = 2$, 3, 5 überprüfen wir einzeln und erhalten die Lösungspaare $(2,2)$, $(3,2)$ und $(5,3)$. Ab nun sei $n \geq 7$. Als Primzahl ist n damit ungerade, schreibe $n = 2m - 1$. Es ist $m < n$ und somit $(n-1)!$ durch m teilbar. Also gilt:
$$1 \equiv (-1)^{k-1} \mod m$$
Wegen $n \geq 7$ ist auf jeden Fall $m > 2$ und somit $1 \not\equiv -1 \bmod m$. Also muss $k-1$ gerade sein.

Nach dem LTE-Lemma gilt in dieser Situation:
$$v_2((n-1)!) = v_2\left(n^{k-1} - 1\right) = v_2(n-1) + v_2(n+1) + v_2(k-1) - 1$$
Mit $v_2((n-1)!) = v_2((n-2)!) + v_2(n-1)$ erhalten wir weiters
$$v_2((n-2)!) = v_2(n+1) + v_2(k-1) - 1.$$
Bekanntlich ist außerdem:
$$v_2((n-2)!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-2}{2^j} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor.$$
Daher:
$$v_2(k-1) = v_2((n-2)!) - v_2(n+1) + 1 \geq \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor - \log_2(n+1) + 1.$$
Für $n \geq 10$ ist $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor > \log_2(n+1)$ (da man zum Beispiel leicht mit Induktion $2^{N-1} < N$ mit $N = (n+1)/2$ in diesem Bereich zeigen kann). Somit gilt $v_2(k-1) > \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + 1 \geq \frac{n-2}{4}$. Daher ist $k-1 > 2^{(n-2)/4}$. Für $n \geq 19$ ist weiters $2^{(n-2)/4} > n$ (auch das ist mit Induktion leicht zu überprüfen), und damit insgesamt $k-1 > n$. Also ist
$$n^{k-1} - 1 > n^n - 1 \geq (n-1)!.$$
Für $n \geq 19$ gibt es damit keine Lösungen. Nun überprüfen wir noch einzeln $n = 7$, 11, 13, 17 und stellen fest, dass die bereits gefundenen die einzigen Lösungen sind.

(Michael Reitmeir, Michael Schmidt) □

Lösung 2a. Den Fall, dass $k-1$ ungerade ist für $n \geq 7$, können wir auch mit dem LTE-Lemma ausschließen. In dieser Situation gilt:
$$v_2((n-1)!) = v_2(n^{k-1} - 1) = v_2(n-1)$$
Mit $v_2((n-1)!) = v_2((n-2)!) + v_2(n-1)$ folgt
$$v_2((n-2)!) = 0,$$
was für $n \geq 4$ falsch ist.

(Felix Pernegger, Dominik Pultar) □

Lösung 2b. Den Größenunterschied zwischen $v_2((n-2)!)$ und einem Logarithmus zur Basis 2 können wir präziser abschätzen, indem wir das Wachstum der beiden Ausdrücke vergleichen.

Wie vorhin folgern wir, dass wir nur noch $n \geq 7$ prim und $k-1$ gerade betrachten müssen. Mit LTE erhalten wir wieder

$$v_2((n-2)!) = v_2(n+1) + v_2(k-1) - 1.$$

Für $k > n$ erhalten wir wie oben einen Widerspruch. Wir müssen also nur noch den Fall $k \leq n$ betrachten. Damit ist $v_2(n+1) \leq \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ und $v_2(k-1) \leq \lfloor \log_2(k-1) \rfloor \leq \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$, also insgesamt

$$v_2((n-2)!) \leq 2\lfloor \log_2(n+1) \rfloor - 1 < 2\lfloor \log_2(n+1) \rfloor. \tag{$*$}$$

Für wachsendes n wird der Wert von $2\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$ genau dann größer, wenn $n+1$ eine Zweierpotenz überschreitet. Der Wert wird dabei jeweils um genau 2 erhöht. Hingegen wird der Wert von $v_2((n-2)!)$ schon um 2 größer, wenn $n-2$ eine durch 4 teilbare Zahl überschreitet. Da letzteres insbesondere für Zweierpotenzen passiert, wächst die Funktion $n \mapsto v_2((n-2)!)$ in jedem Schritt mindestens so stark an wie die Funktion $n \mapsto 2\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.

Für $n = 11$ ist $v_2((n-2)!) = 7$ und $2\lfloor \log_2(n+1) \rfloor = 6$. Wegen des schnelleren Wachstums der linken Seite ist die Ungleichung $(*)$ daher für $n \geq 11$ falsch. Für $n \geq 11$ gibt es also keine Lösungen. Wir überprüfen noch $n = 7$ einzeln und erhalten auch keine Lösung, womit wir wissen, dass $(2,2)$, $(3,2)$ und $(5,3)$ alle Lösungen sind.

(Felix Pernegger) □

Lösung 2c. Wie vorhin folgern wir, dass wir nur noch $n \geq 7$ prim und $k-1$ gerade betrachten müssen. Mit LTE erhalten wir wieder

$$v_2((n-2)!) = v_2(n+1) + v_2(k-1) - 1.$$

In Lösung 2 wurde $v_2((n-2)!)$ durch die ersten zwei Glieder der Reihe $v_p(m!) = \sum_{j=1}^{\infty} \lfloor \frac{m}{p^j} \rfloor$ abgeschätzt. Eine Variante dieser Formel lautet

$$v_p(m!) = \frac{m - s_p(m)}{p-1}$$

für positive ganze Zahlen m und Primzahlen p, wobei $s_p(m)$ die Ziffernsumme von m bei Entwicklung zur Basis p bezeichnet. In unserer Situation erhalten wir $v_2((n-2)!) = n-2-s_2(n-2)$, also

$$n - 2 - s_2(n-2) = v_2(n+1) + v_2(k-1) - 1.$$

Mit $v_2(n+1) \leq \log_2(n+1)$, $v_2(k-1) \leq \log_2(k-1)$ und $s_2(n-2) \leq \log_2(n-2) + 1 < \log_2(n+1) + 1$ erhalten wir die Ungleichung

$$n - 2\log_2(n+1) - 2 \leq \log_2(k-1).$$

Für $n \geq 14$ gilt nun

$$n > 3\log_2(n+1) + 2,$$

und damit

$$\log_2(n+1) < n - 2\log_2(n+1) - 2 \leq \log_2(k-1).$$

Also muss $k - 1 > n + 1$ sein, das heißt insbesondere $k > n$, womit wir wie oben einen Widerspruch erhalten. Für $n \geq 14$ gibt es damit keine Lösungen. Nun überprüfen wir noch einzeln $n = 7$, 11, 13 und stellen fest, dass die bereits gefundenen die einzigen Lösungen sind.

(Dominik Pultar) □