52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde – Lösungen

1. Mai 2021

Aufgabe 1. *Seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a+b+c=1$.*
Man beweise

$$\frac{a}{2a+1}+\frac{b}{3b+1}+\frac{c}{6c+1}\le\frac{1}{2}.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Lösung 1. Ein Quotient von zwei linearen Polynomen lässt sich durch Polynomdivision immer auf die Summe einer Zahl und eines Quotienten mit konstantem Zähler zurückführen. Unser erstes Ziel ist es, die linksseitige Summe auf diese Schreibweise umzuformen. Dazu ziehen wir vom ersten Bruch $1/2$, vom zweiten Bruch $1/3$ und vom dritten Bruch $1/6$ ab und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$\frac{a}{2a+1}-\frac{1}{2}+\frac{b}{3b+1}-\frac{1}{3}+\frac{c}{6c+1}-\frac{1}{6}\le\frac{1}{2}-1 \iff \frac{1}{4a+2}+\frac{1}{9b+3}+\frac{1}{36c+6}\ge\frac{1}{2}.$$

Die linke Seite der letzten Ungleichung erinnert an das harmonische Mittel, das man durch das arithmetische Mittel abschätzen könnte. Allerdings lässt sich die Summe der Nenner $4a+9b+36c+11$ nicht besonders gut durch die Nebenbedingung $a+b+c=1$ kontrollieren. Wir versuchen die Brüche deshalb so zu erweitern, dass a, b und c in der Summe der Nenner gleiche Koeffizienten haben, d.h. dass das Produkt von Zähler und Koeffizient von a, b bzw. c im Nenner jeweils dieselbe Zahl ergibt. Daher erweitern wir den ersten Bruch mit 3 und den zweiten mit 2 und erhalten

$$\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{9b+3}+\frac{1}{36c+6}=\frac{3}{12a+6}+\frac{2}{18b+6}+\frac{1}{36c+6}=$$
$$\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{18b+6}+\frac{1}{18b+6}+\frac{1}{36c+6}.$$

Die Anwendung der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung für sechs Summanden ergibt, dass

$$\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{12a+6}+\frac{1}{18b+6}+\frac{1}{18b+6}+\frac{1}{36c+6}$$
$$\ge\frac{6^2}{12a+6+12a+6+12a+6+18b+6+18b+6+36c+6}$$

gilt, d.h.

$$\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{9b+3}+\frac{1}{36c+6}\ge\frac{36}{36(a+b+c+1)}=\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

In der arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung ergibt sich genau dann Gleichheit, wenn alle Terme gleich sind. Dies ist bei uns äquivalent zu $12a+6=18b+6=36c+6$, also $a=3c$ und $b=2c$. Mit Hilfe der Nebenbedingung erhalten wir schließlich $6c=1$, d.h. $c=1/6$, und damit $a=1/2$ und $b=1/3$, was auch wirklich ein gültiger Gleichheitsfall ist.

(Walther Janous) □

Bemerkung. Die Ungleichung

$$\frac{1}{4a+2}+\frac{1}{9b+3}+\frac{1}{36c+6}\geq\frac{1}{2}$$

lässt sich auch in der Form

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3b+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6c+1}\geq\frac{1}{2}$$

darstellen. Weil dabei die Summe der drei Koeffizienten $1/2$, $1/3$ und $1/6$ gleich 1 ist, folgt mit der gewichteten arithmetisch-harmonischen Mittelungleichung, dass

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3b+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6c+1}\geq\frac{1}{1/2\cdot(2a+1)+1/3\cdot(3b+1)+1/6\cdot(6c+1)}$$

gilt. Dies und

$$1/2\cdot(2a+1)+1/3\cdot(3b+1)+1/6\cdot(6c+1)=a+b+c+1/2+1/3+1/6=1+1=2$$

ergeben die Ungleichung.

Lösung 1a. Substituiere $A=2a+1$, $B=3b+1$ und $C=6c+1$, dann ist zu zeigen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{A-1}{2}}{A}+\frac{\frac{B-1}{3}}{B}+\frac{\frac{C-1}{6}}{C}\leq\frac{1}{2}\\
\iff\quad&\frac{A-1}{2A}+\frac{B-1}{3B}+\frac{C-1}{6C}\leq\frac{1}{2}\\
\iff\quad&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2A}-\frac{1}{3B}-\frac{1}{6C}\leq\frac{1}{2}\\
\iff\quad&\frac{1}{2A}+\frac{1}{3B}+\frac{1}{6C}\geq\frac{1}{2}\\
\iff\quad&\frac{3}{6A}+\frac{2}{6B}+\frac{1}{6C}\geq\frac{1}{2}\\
\iff\quad&\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{A}+\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{6}\geq\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Die Nebenbedingung wird zu

$$\begin{aligned}
&\frac{A-1}{2}+\frac{B-1}{3}+\frac{C-1}{6}=1\\
\iff\quad&3A-3+2B-2+C-1=6\\
\iff\quad&3A+2B+C=12.
\end{aligned}$$

Mit AM-HM ergibt sich

$$\frac{\frac{1}{A}+\frac{1}{A}+\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}}{6}\geq\frac{6}{A+A+A+B+B+C}=\frac{6}{12}.$$

Gleichheit gilt für $\frac{1}{A}=\frac{1}{B}=\frac{1}{C}$, also $A=B=C=2$, und damit $a=1/2$, $b=1/3$ und $c=1/6$.

(Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 2. *Seien ABC ein Dreieck und X der Punkt, der auf der Verlängerung der Seite AC über A hinaus so liegt, dass $AX=AB$. Sei analog Y der Punkt, der auf der Verlängerung der Seite BC über B hinaus so liegt, dass $BY=AB$.*

Man zeige, dass die Umkreise von ACY und BCX einander ein zweites Mal in einem Punkt ungleich C auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BCA$ schneiden.

(Theresia Eisenkölbl)

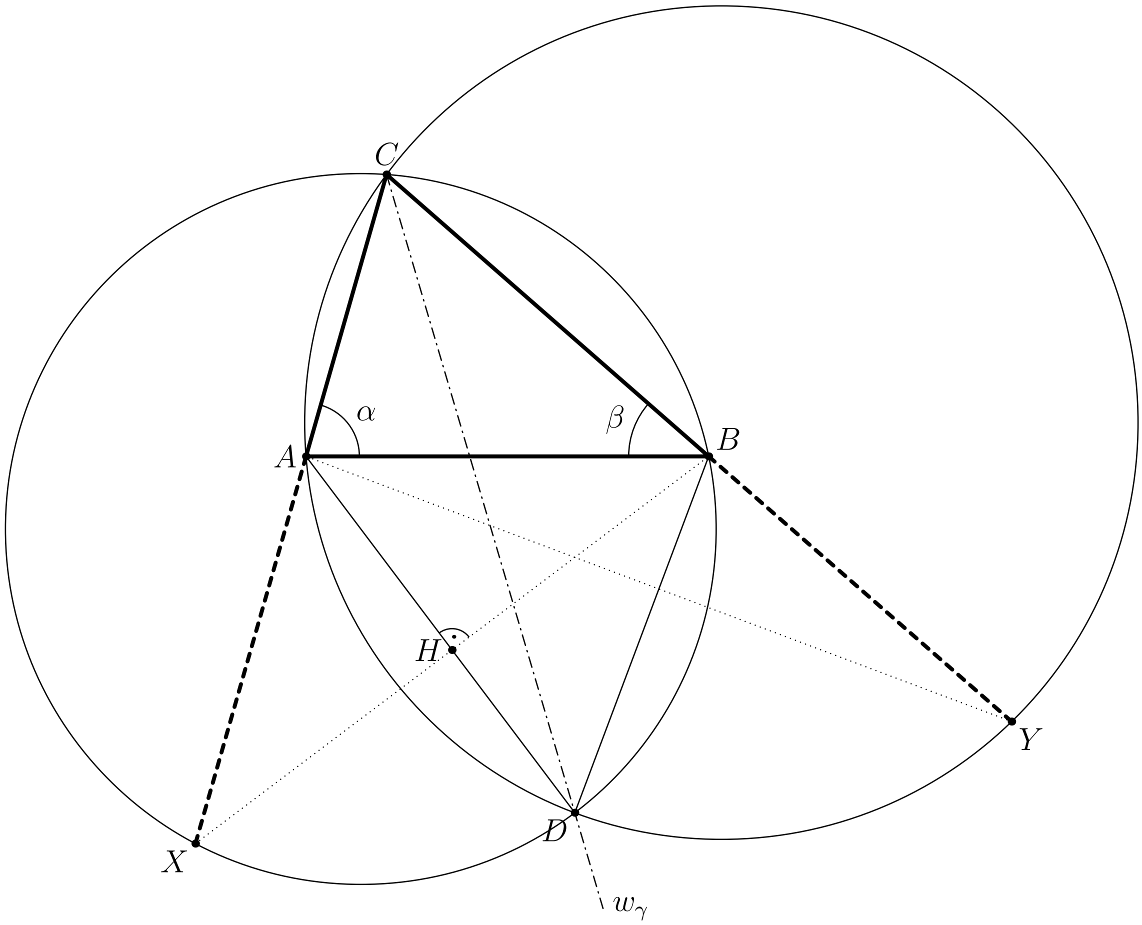

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Wir bezeichnen wie üblich die Dreieckswinkel bei A, B und C mit α, β und γ, siehe Abbildung 1.

Wir werden zuerst den Schnittpunkt der Winkelsymmetrale von ACB mit dem Umkreis von BCX definieren, und dann nachweisen, dass dieser Punkt auch auf dem Umkreis von CAY liegt. Zu diesem Zweck werden wir unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes nachweisen, dass $CADY$ ein Sehnenviereck ist.

Um dies zu bewerkstelligen, betrachten wir zuerst den Winkel $\sphericalangle CYA$. Da das Dreieck ABY laut Angabe gleichschenkelig ist, gilt

$$\sphericalangle CYA = \sphericalangle BYA = (180° - \sphericalangle YBA)/2 = \sphericalangle CBA/2 = \beta/2.$$

Sei nun $D \neq C$ der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_γ von ACB mit dem Umkreis von BCX. Es bleibt noch nachzuweisen, dass auch $\sphericalangle CDA = \beta/2$ gilt.

Nach dem Südpolsatz liegt D auf der Streckensymmetrale von BX und nach dem Peripheriewinkelsatz über XD gilt $\sphericalangle XBD = \sphericalangle XCD = \gamma/2$. Der Halbierungspunkt von BX heiße H. Dann ist $\sphericalangle BDH = 90° - \sphericalangle HBD = 90° - \gamma/2$.

Analog zum Nachweis, dass $\sphericalangle CYA = \beta/2$ gilt, erhalten wir auch $\sphericalangle BXA = \sphericalangle ABX = \alpha/2$. Nach dem Peripheriewinkelsatz über BC gilt auch $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BXC = \sphericalangle BXA = \alpha/2$. Daher gilt $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BDA - \sphericalangle BDC = \sphericalangle BDH - \alpha/2 = 90° - \gamma/2 - \alpha/2 = \beta/2$. Damit haben wir aber nachgewiesen, dass $\sphericalangle CDA = \beta/2 = \sphericalangle CYA$, weshalb (da D und Y sicher auf derselben Seite von CA liegen) A, D, Y und C auf einem Kreis liegen.

Der Punkt D liegt also auf dem Umkreis von CAY, und es ist damit D wie behauptet der Schnittpunkt der beiden Umkreise.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Wir bezeichnen wie üblich die Dreieckswinkel bei A, B und C mit α, β und γ.

Es reicht zu zeigen, dass der Ankreismittelpunkt I_c des Ankreises, der die Strecke AB berührt, auf den beiden Kreisen liegt. Dazu sehen wir uns die jeweiligen Peripheriewinkel an.

Da das Dreieck AYB laut Angabe gleichschenkelig ist, gilt

$$\sphericalangle CYA = \sphericalangle BYA = 90° - \sphericalangle YBA/2 = 90° - 90° + \beta/2 = \beta/2.$$

Es gilt aber auch

$$\sphericalangle CI_cA = 180° - (180° - \alpha)/2 - \alpha - \gamma/2 = 90° - \alpha/2 - \gamma/2 = \beta/2.$$

Also liegt I_c nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes auf dem Umkreis von ACY. Analog erhält man aber auch, dass I_c auf dem Umkreis von BCX liegt. Somit ist I_c der zweite Schnittpunkt und liegt wie verlangt auf der Winkelsymmetrale.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Auf einem Kreis liegen n Punkte. Jeder dieser Punkte wird mit einer reellen Zahl beschriftet, die höchstens 1 ist. Dabei sei jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn unmittelbar davor stehen.*

Man bestimme in Abhängigkeit von n den größtmöglichen Wert, den die Summe aller Zahlen annehmen kann.

(Walther Janous)

Antwort. Für durch 3 teilbare n kann die Summe maximal den Wert $2n/3$ annehmen, für alle anderen n ist sie stets 0.

Lösung. Vorweg beobachten wir, dass alle Zahlen Absolutbeträge sind und als solche größer oder gleich Null sein müssen.

Wenn man zwei am Kreis benachbarte Zahlen x_1 und x_2 festlegt, kann man daraus alle weiteren Zahlen eindeutig berechnen. Wir versuchen nun einmal, ein paar Zahlen einzusetzen und zu schauen, was passiert, siehe Tabelle 1.

$\mathbf{x_1}$	**0,8**	**0,1**	**0,8**	**0,4**	**0,8**	**0,6**	**0,3**
$\mathbf{x_2}$	**0,1**	**0,8**	**0,4**	**0,8**	**0,6**	**0,8**	**0**
x_3	0,7	0,7	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
x_4	0,6	0,1	0	0,4	0,4	0,6	0,3
x_5	0,1	0,6	0,4	0	0,2	0,4	0
x_6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
x_7	0,4	0,1	0	0,4	0	0,2	0,3
x_8	0,1	0,4	0,4	0	0,2	0	0
x_9	0,3	0,3	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
x_{10}	0,2	0,1	0	0,4	0	0,2	0,3
x_{11}	0,1	0,2	0,4	0	0,2	0	0
x_{12}	0,1	0,1	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
x_{13}	0	0,1	0	0,4	0	0,2	0,3

Tabelle 1: Aufgabe 3, Experimente

Es fällt auf: Wenn wir zwei verschiedene positive Zahlen als Startzahlen wählen, werden die Zahlen tendenziell immer kleiner. Das liegt daran, dass der Absolutbetrag der Differenz zweier positiver Zahlen immer kleiner als die größere der beiden Zahlen ist. Insbesondere kommt damit zumindest die größere der beiden Startzahlen nie wieder vor: Die dritte Zahl ist echt kleiner als die größere der beiden, die vierte Zahl ebenso (weil die dritte als Differenz zweier verschiedener Zahlen positiv ist und wir dasselbe Argument wiederholen können). Ab hier kann auch die Null auftreten (wie in dem Beispiel mit Startzahlen 0,8 und 0,4), selbst dann ist aber der Absolutbetrag der Differenz zumindest kleiner oder gleich der größeren der beiden Zahlen, deren Differenz gebildet wurde. Somit sind auch alle weiteren Zahlen kleiner als die größere Startzahl. Da wir aber eine Runde im Kreis gehen und am Ende wieder bei den Startzahlen landen müssen, ist das nicht erlaubt.

Die zwei Startzahlen müssen also entweder identisch oder eine davon gleich 0 sein, das heißt also, dass wir mit x, x oder mit x, 0 oder mit 0, x beginnen (mit einer reellen Zahl x). In allen diesen Fällen ergibt sich ein Muster „x, x, 0", das sich immer wieder wiederholt (wie zum Beispiel in der letzten Spalte der Tabelle).

Für $x = 0$, also lauter Nullen, geht das immer. Wenn aber $x > 0$ ist, muss n durch 3 teilbar sein, damit das Muster nach einer Umrundung des Kreises zusammenpasst.

In diesem Fall beträgt die Summe aller Zahlen $x \cdot \frac{2}{3} \cdot n$, was für $x = 1$ am größten ist.

(Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 4. *Auf einer Tafel stehen* 17 *ganze Zahlen, von denen keine durch* 17 *teilbar ist. Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem Alice beginnt und bei dem sie abwechselnd folgende Schritte durchführen:*

- *Alice sucht sich eine Zahl a auf der Tafel aus und ersetzt diese durch a^2.*
- *Bob sucht sich eine Zahl b auf der Tafel aus und ersetzt diese durch b^3.*

Alice gewinnt, wenn nach endlich vielen Schritten die Summe der Zahlen auf der Tafel ein Vielfaches von 17 *ist.*

Man beweise, dass Alice immer den Sieg erzwingen kann.

(Daniel Holmes)

Lösung. Da sowohl die Voraussetzung als auch die Gewinnbedingung auf der Teilbarkeit durch 17 beruht, reicht es, die Zahlen modulo 17 zu betrachten. Am Anfang sind alle Reste ungleich Null und Alice gewinnt, wenn die Summe modulo 17 Null ergibt.

Die Schritte $a \mapsto a^2$ und $b \mapsto b^3$ machen aus Resten ungleich Null Potenzen der ursprünglichen Werte. Daher ist der kleine Satz von Fermat nützlich, der für $a \not\equiv 0 \pmod{17}$ und die Primzahl 17 die Kongruenz

$$a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$$

ergibt.

Wenn Alice also dieselbe Zahl a viermal hintereinander quadriert, dann steht an der Stelle sicher der Rest 1 modulo 17. Bob kann nichts dagegen machen, denn wenn Bob k-mal diese Zahl zur dritten Potenz erhebt, so erhalten wir insgesamt

$$a^{2^4 \cdot 3^k} = 16^{3^k} \equiv 1^{3^k} = 1 \pmod{17}.$$

Der Zeitpunkt von Bobs Zügen ist dabei egal, da die Reihenfolge der Faktoren im Exponenten nichts ändert.

Somit kann Alice alle Reste zum Rest 1 machen, indem sie jede Zahl viermal quadriert. Dann ist die Summe natürlich $17 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{17}$ und Alice hat gewonnen.

(Theresia Eisenkölbl) □