47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

30. April 2016

Aufgabe 1. *Man bestimme die größte Konstante C derart, dass für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die Ungleichung*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2))$$

gilt.

Man ermittle für dieses C alle $x_1, x_2, \ldots, x_6$, für die Gleichheit gilt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Mit $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 1$ ergibt sich $36 \geq 12C$, also $C \leq 3$.

Wir beweisen nun, dass $C_{\text{max}} = 3$ gilt.

Damit lautet die in Rede stehende Ungleichung

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq 3 \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2)),$$

d.h. (nach einigen Umformungen)

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_6^2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_6 \geq{}& x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 \\ &+ x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_6 \end{aligned}$$

Diese Ungleichung lässt sich aber in der Form

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_3 + x_6)^2 \\ &\qquad \geq (x_1 + x_4)(x_2 + x_5) + (x_2 + x_5)(x_3 + x_6) + (x_3 + x_6)(x_1 + x_4) \end{aligned}$$

darstellen.

Deshalb ergibt sich ihre Gültigkeit aus der allgemeinen Aussage

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$$

samt Gleichheit genau für $X = Y = Z$. (Dabei sind X, Y und Z beliebige reelle Zahlen.)

In der in Rede stehenden Ungleichung tritt demnach die Gleichheit genau für alle 6-tupel $(x_1, \ldots, x_6)$ reeller Zahlen mit $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$ ein.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Wir formen den Klammerausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung, also

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 + x_4x_6 + x_5x_6 + x_1x_5 + x_1x_6 + x_2x_6$$

um in

$$(x_1 + x_4)(x_2 + x_5) + (x_2 + x_5)(x_3 + x_6) + (x_3 + x_6)(x_1 + x_4).$$

Mit der Substitution $X = x_1 + x_4$, $Y = x_2 + x_5$ und $Z = x_3 + x_6$ lautet unsere Ungleichung demnach

$$(X + Y + Z)^2 \geq C \cdot (XY + YZ + ZX),$$

wobei X, Y und Z beliebige reelle Zahlen sind.

Für $X = Y = Z = 1$ ergibt sich $9 \geq 3C$, d.h. $C \leq 3$.

Wir zeigen nun

$$(X + Y + Z)^2 \geq 3(XY + YZ + ZX).$$

Ausquadrieren und Zusammenfassen führt auf

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX,$$

d.h. aber

$$(X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau für $X - Y = Y - Z = Z - X = 0$, d.h. $X = Y = Z$, also $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Setzt man $x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 1$, so erhält man $36 \geq 12C$, also $C \leq 3$.

Wir versuchen nun die Ungleichung mit $C = 3$ zu beweisen. Die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} L := x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 + 2x_1x_4 - x_2x_4 - x_3x_4 + x_4^2 - x_1x_5 \\ + 2x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 + x_5^2 - x_1x_6 - x_2x_6 + 2x_3x_6 - x_4x_6 - x_5x_6 + x_6^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine quadratische Ungleichung. Diese kann man immer in folgender Weise mechanisch lösen. Wir ergänzen so zu einem Quadrat, dass x_6 nicht mehr außerhalb dieses Quadrats vorkommt, also

$$\begin{aligned} L = \left(x_6 - \frac{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{3}{2}x_1x_4 - \frac{3}{2}x_2x_4 \\ + \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{3}{2}x_1x_5 + \frac{3}{2}x_2x_5 - \frac{3}{2}x_4x_5 + \frac{3}{4}x_5^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Im schlimmsten Fall ist x_6 so, dass das erste Quadrat verschwindet. Wir müssen nur mehr zeigen, dass auch der aus den übrigen Summanden bestehende Ausdruck nicht-negativ ist. Wir vervollständigen wieder zu einem Quadrat, sodass x_5 danach nicht mehr außerhalb davon auftritt, also

$$L = \left(x_6 - \frac{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(x_5 - (x_4 - x_2 + x_1))^2 \geq 0.$$

Zum Glück ist kein Rest mehr übrig geblieben und wir müssen nicht weiter arbeiten.

Als Summe von zwei Quadraten ist die linke Seite L sicher nicht-negativ.

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} x_5 + x_2 &= x_1 + x_4 \\ 2(x_6 + x_3) &= x_1 + x_2 + x_4 + x_5, \end{aligned}$$

zusammen also für $x_1 + x_4 = x_2 + x_5 = x_3 + x_6$.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit $AB > AC$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks werde mit H bezeichnet. Spiegelt man den Punkt C an der Höhe AH, erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt der Geraden EH mit der Geraden AC sei F.*

Man beweise: Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF liegt auf der Geraden AB.

(Karl Czakler)

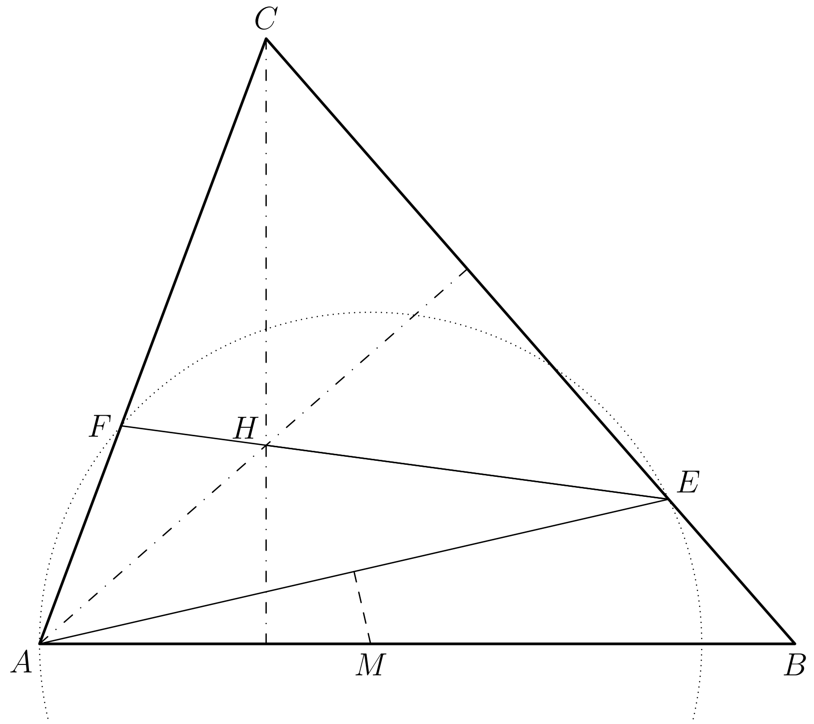

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Wie üblich bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ mit α, β bzw. γ. Nach Angabe gilt $\gamma > \beta$. Dann gilt (vgl. Abbildung 1) $\sphericalangle AEC = \gamma$, $\sphericalangle FEC = 90° - \beta$ und daher $\sphericalangle AEF = \gamma + \beta - 90°$. Da weiters $\sphericalangle CAE = 180° - 2\gamma$, folgt

$$\sphericalangle AFE = 90° + \gamma - \beta.$$

Die Streckensymmetrale von AE schneide die Seite AB im Punkt M und k sei der Kreis mit dem Mittelpunkt M durch A und E. Wir zeigen, dass F auch auf diesem Kreis liegt. Es gilt:

$$\sphericalangle EAM = \alpha - (180° - 2\gamma) = \gamma - \beta.$$

Also erhalten wir $\sphericalangle AME = 2(90° + \beta - \gamma)$ und, da $\sphericalangle AFE = 90° + \gamma - \beta$, liegt der Punkt F mit dem Peripheriewinkelsatz auf dem Kreis k.

Bemerkung: Dieser Sachverhalt gilt auch für das stumpfwinkelige Dreieck.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir bezeichnen den Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF mit M, vgl. Abbildung 2. Wie üblich bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CBA$ und $\sphericalangle ACB$ mit α, β bzw. γ. Nach Angabe gilt $\gamma > \beta$. Daraus folgt insbesondere $\gamma > 45°$, weil sonst $\alpha = 180° - \beta - \gamma > 180° - 2\gamma > 90°$ gelten würde.

Bei der angegebenen Spiegelung gehen HC in HE und AC in AE über, daher gelten

$$\sphericalangle EAF = 2\sphericalangle HAC = 2(90° - \gamma), \qquad \sphericalangle FEA = \sphericalangle ACH = 90° - \alpha.$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck AEF ergibt sich damit

$$\sphericalangle AFE = 180° - (180° - 2\gamma + 90° - \alpha) = 2\gamma + \alpha - 90°.$$

Nach dem Zentriwinkelsatz gilt $\sphericalangle EMF = 2\sphericalangle EAF = 360° - 4\gamma$. Da das Dreieck FME gleichschenkelig ist, gilt $\sphericalangle MFE = 90° - (180° - 2\gamma) = 2\gamma - 90°$. Dadurch ergibt sich

$$\sphericalangle AFM = \sphericalangle AFE - \sphericalangle MFE = (2\gamma + \alpha - 90°) - (2\gamma - 90°) = \alpha.$$

Da das Dreieck AMF gleichschenkelig ist, gilt auch $\sphericalangle MAF = \sphericalangle AFM = \alpha$. Daher liegt M auf der Geraden AB.

(Clemens Heuberger) □

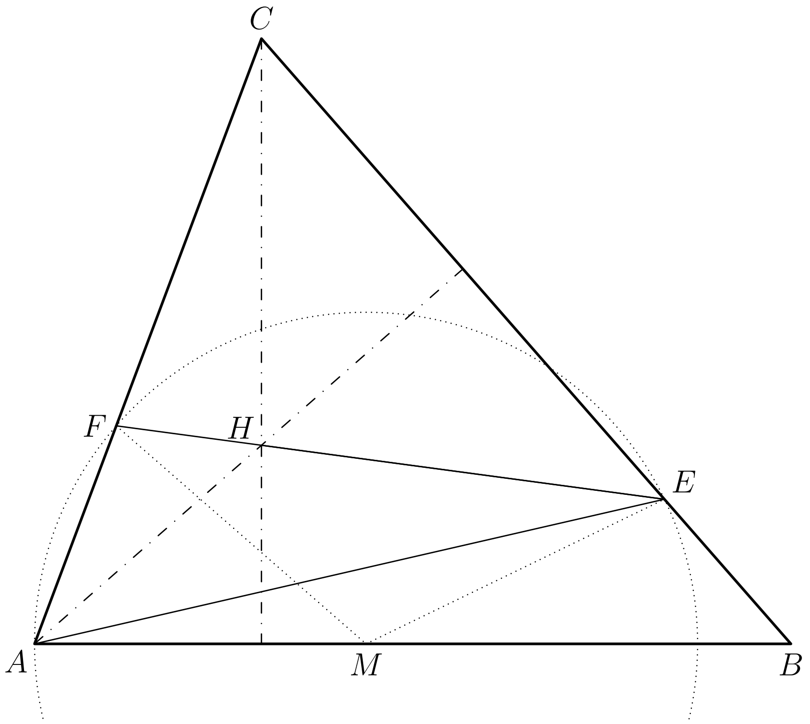

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Lösung 3. Wir bezeichnen wie üblich den Winkel $\sphericalangle BAC$ mit α, vgl. Abbildung 3.

Sei X der Schnittpunkt des Umkreises des Dreiecks AEF mit der Geraden AB. Damit ist $AFEX$ ein Sehnenviereck und daher $\sphericalangle FEX = 180° - \alpha$. Aufgrund der Spiegelung gilt $\sphericalangle FEA = \sphericalangle ACH = 90° - \alpha$. Daher gilt $\sphericalangle AEX = \sphericalangle FEX - \sphericalangle FEA = 90°$. Damit liegt E auf dem Thaleskreis über AX, somit ist AX ein Durchmesser des Umkreises des Dreiecks AEF. Damit liegt der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF auf AX und daher auf AB.

(Anna Brötzner) □

Lösung 4. Siehe Abbildung 4. Sei θ der Winkel zwischen AF und der Tangenten t in A an den Umkreis des Dreiecks AEF. Aufgrund des Sehnen-Tangentenwinkelsatz folgt $\sphericalangle FEA = \theta$. Aufgrund der Spiegelung gilt $\sphericalangle ACH = \sphericalangle FEA = \theta$. Wegen $\sphericalangle ACH = \theta$ ist t parallel zu CH und damit normal auf AB. Damit liegt der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF auf AB.

(Konstantin Mark, Clemens Heuberger) □

Aufgabe 3. *Es sind 2016 Punkte auf einem Kreis angeordnet. Wir dürfen nach Lust und Laune 2 oder 3 Punkte im Uhrzeigersinn weiter springen.*

Wie viele Sprünge muss man mindestens machen, um alle Punkte zu erreichen und wieder am Ausgangspunkt anzukommen?

(Gerd Baron)

Lösung 1. Wir zeigen zunächst indirekt, dass wir es nicht schaffen, wenn wir alle Punkte genau einmal verwenden.

Da 2016 durch 2 und 3 teilbar ist, geht es nicht mit Sprüngen einer Länge allein. Also müssen beide vorkommen. Wegen der Zyklizität dürfen wir oBdA eine Stelle mit der Sprungfolge 2, 3 betrachten. Seien also A, B, C, D, E, F sechs aufeinanderfolgende Punkte am Kreis und wir nehmen an, dass A, C und F hintereinander angesprungen werden. Von einem Punkt vor A können wir als neuen Punkt nur B erreichen. Davon dann aber nur D oder E. Also geht es nicht in 2016 Sprüngen. Wir müssen also A, B oder C doppelt anspringen und durch diesen Block insgesamt drei Mal durch. Daher wählen wir Serien aus Sprüngen der Länge 3.

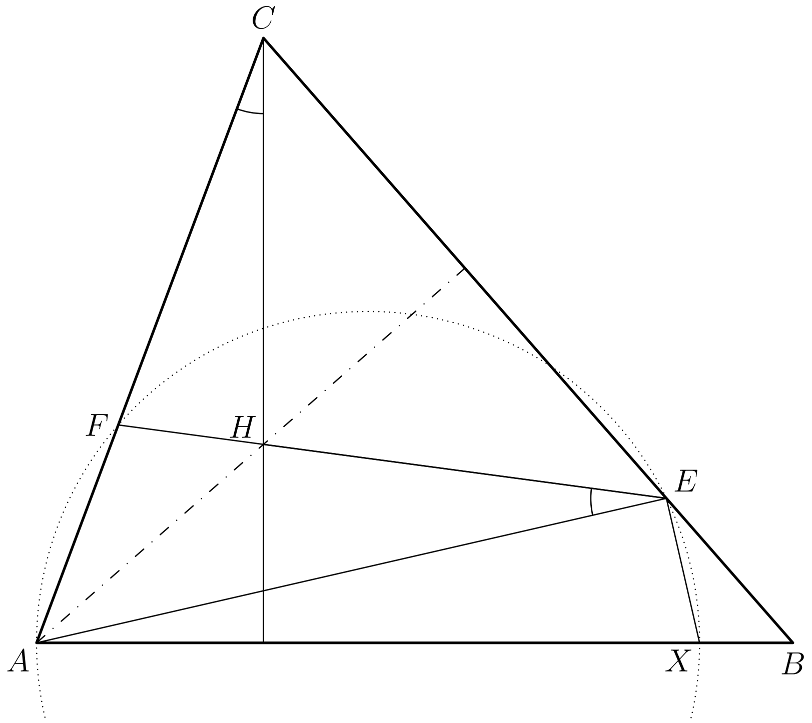

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

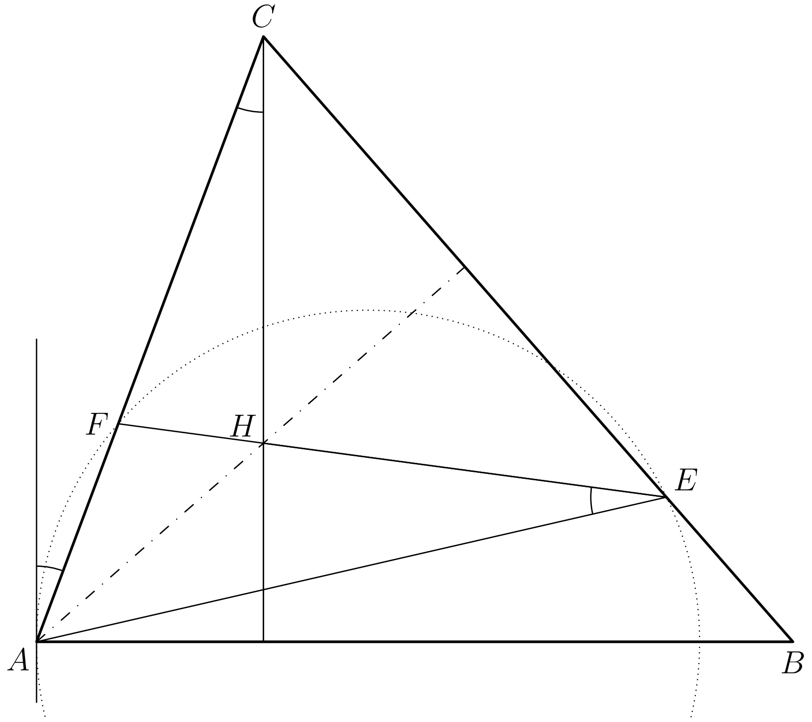

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 4

Mit 1, 4, 7, ..., 2014, 2016, 3, 6, ..., 2013, 2015, 2, 5, ..., 2015, 1 haben wir in 2017 Sprüngen (Nur 2015 doppelt) die Runde geschafft. Die gesuchte Antwort lautet also: 2017 Sprünge.

(Gerd Baron) □

Lösung 2. Um alle Zahlen zu erreichen, muss man natürlich mindestens 2016 Sprünge machen. Man kann nicht nur Zweiersprünge oder nur Dreiersprünge verwenden, da man sonst in einer Restklasse modulo 2 bzw. 3 bleiben würde.

Mit genau 2016 Sprüngen wäre also der zurückgelegte Weg strikt zwischen $2 \cdot 2016$ und $3 \cdot 2016$ und kann daher nicht zum Ausgangspunkt zurückkehren. Daher muss man mindestens 2017 Sprünge verwenden.

Das ist aber auch möglich, zum Beispiel mit der folgenden Anordnung, in der in den ausgesparten Teilen nur Dreiersprünge verwendet werden:

$$0, 3, 6, \ldots, 2013, 2015, 2, 5, \ldots, 2012, 2014, 1, 4, \ldots, 2011, 2013, 0.$$

(Hier wird einfach nach der Reihe jeweils eine Restklasse modulo 3 abgearbeitet und dann mit einem Zweiersprung mit der nächsten verbunden.)

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2a. Wir bezeichnen die Anzahl der Schritte der Längen 2 und 3 mit a bzw. b. Wie in obigen Lösungen sehen wir, dass $a > 0$ und $b > 0$. Offensichtlich gilt $2a + 3b \equiv 0 \pmod{2016}$.

Wäre die Aufgabe in 2016 Schritten bewältigbar, so gälte $2a+3b = 2(2016-b)+3b \equiv 0 \pmod{2016}$, woraus sofort $b \equiv 0 \pmod{2016}$ folgt, was ein Widerspruch zu $a = 2016 - b > 0$ und $b > 0$ ist.

Weiter wie in Lösung 2.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2b. Die Kernfrage der Aufgabe ist, ob der gerichtete zirkulante Graph mit 2016 Knoten und Distanzen 2 und 3 hamiltonsch ist.

Dazu verwenden wir folgenden Satz:

> *Theorem* ([1, Theorem 4], [2, Theorem 1.1]). The circulant digraph $\mathrm{Circ}(n; a, b)$ of outdegree 2 has a hamiltonian cycle iff there exist s, $t \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, such that
>
> - $s + t = \gcd(n, a - b)$, and
> - $\gcd(n, sa + tb) = 1$.

In unserem Fall ist $n = 2016$, $a = 2$, $b = 3$, $\mathrm{ggT}(n, a - b) = 1$, also $s = 0$ oder $t = 0$ und damit $\mathrm{ggT}(n, sa + tb)$ sicher nicht 1.

References:

[1] R.A. Rankin, A campanological problem in group theory, Proc. Cambridge Philos. Soc. **44** (1948), 17–25.

[2] Dave Witte Morris, Joy Morris, Kerri Webb, Hamiltonian cycles in $(2, 3, c)$-circulant digraphs, Discrete Math. **309** (2009), 5484–5490, `http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2009.01.001`.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2c. Wir bezeichnen die Punkte am Kreis mit 1, 2, 3, ..., 2016. Da man bei jeder Zahl mindestens einmal ankommen muss, muss man mindestens 2016 Sprünge machen.

In der ersten Runde ist es nicht möglich, alle Zahlen anzuspringen, weil ja zum Beispiel die Zahl 2 nicht erreicht wird.

Nach zwei Runden ist es auch nicht möglich, dass man alle Zahlen erreicht hat. Wenn man 2016 Zahlen in zwei Runden erreichen will, muss man eine Distanz von $2 \cdot 2016$ in mindestens 2016 Sprüngen zurücklegen; daher darf man nur lauter Zweiersprünge machen. Dann erreicht man aber nur die ungeraden Zahlen.

Daher ist es notwendig, mindestens drei Runden zu springen. Angenommen, man macht 2016 Sprünge in drei Runden, dann müssen das lauter Dreiersprünge sein, weil anders eine Distanz von mindestens $3 \cdot 2016$ nicht mit 2016 Sprüngen abzudecken ist. Damit erreicht man aber nur die Zahlen aus der Restklasse 1 modulo 3. Also muss man zumindest zwei Dreiersprünge durch drei Zweiersprünge ersetzen. Das erhöht aber die Anzahl der Sprünge um 1. Man braucht also mindestens 2017 Sprünge.

Ein Beispiel, dass es mit 2017 Sprüngen wirklich möglich ist, in drei Runden alle Punkte zu erreichen und wieder am Ausgangspunkt anzukommen, entnimmt man den vorigen Lösungen.

(Florian Fürnsinn, Richard Henner) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle zusammengesetzten positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Sind $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, so gilt*

$$(d_2 - d_1) : (d_3 - d_2) : \cdots : (d_k - d_{k-1}) = 1 : 2 : \cdots : (k-1).$$

(Walther Janous)

Lösung 1. Weil die Zahl n zusammengesetzt ist, haben wir $k \geq 3$. Mit $d_2 = p$, p prim, ergibt sich aus $(p-1) : (d_3 - p) = 1 : 2$, dass $d_3 = 3p - 2$ ist. Mit $(p-1) : (d_4 - d_3) = 1 : 3$ folgt $d_4 = 6p - 5$. Über eine Induktion erkennt man, dass $d_j = (1 + 2 + \ldots + (j-1))p - (2 + 3 + \ldots + (j-1))$ gilt, also

$$d_j = \frac{j(j-1)}{2} p - \frac{(j-2)(j+1)}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Insbesondere haben wir wegen $d_{k-1} = \frac{n}{p} = \frac{d_k}{d_2}$, dass

$$(k-1)(k-2)p^2 - (k-3)kp = k(k-1)p - (k-2)(k+1)$$

zu gelten hat, also

$$(k-1)(k-2)p^2 - 2(k-2)kp + (k-2)(k+1) = 0$$

Deshalb bleibt die Gleichung

$$(k-1)p^2 - 2kp + (k+1) = 0$$

zu betrachten. Sie hat $p = 1$ bzw. $p = \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}$ als ihre Lösungen. Da beide Optionen für die Primzahl p maximal den Wert 2 annehmen, ergeben sich als einzige mögliche Werte $k = 3$ samt $p = 2$ und $n = 4$. Da die Bedingung für $n = 4$ offensichtlich erfüllt ist, ist das die einzige Lösung.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Da n zusammengesetzt ist, gilt $k \geq 3$. Sei p der kleinste Primteiler von n. Dann gilt $d_2 = p$. Aufgrund der Verhältnisse gilt

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= p - 1, \\ d_3 - d_2 &= 2(p-1), \\ d_4 - d_3 &= 3(p-1), \\ &\vdots \\ d_j - d_{j-1} &= (j-1)(p-1). \end{aligned}$$

Summation ergibt

$$d_j - d_1 = d_j - 1 = (1 + 2 + \cdots + (j-1))(p-1) = \frac{(j-1)j}{2}(p-1).$$

Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{(k-1)k}{2}(p-1)+1, \\ d_{k-1} &= \frac{(k-2)(k-1)}{2}(p-1)+1. \end{aligned}$$

Weiters gilt $d_k = n$ und $d_{k-1} = n/p$. Daraus erhalten wir die Gleichung

$$\frac{(k-1)k}{2}(p-1)+1 = p\Big(\frac{(k-2)(k-1)}{2}(p-1)+1\Big).$$

Durch Multiplikation mit 2 und Faktorisierung erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= (p-1)\big((k-2)(k-1)p+2-k(k-1)\big) \\ &= (p-1)\big((k-2)(k-1)p-k^2+k+2\big) \\ &= (p-1)\big((k-2)(k-1)p-(k+1)(k-2)\big) \\ &= (p-1)(k-2)\big((k-1)p-(k+1)\big). \end{aligned}$$

Da $p-1 \geq 1$ und $k-2 \geq 1$, folgt

$$kp-p-k-1=0$$

oder äquivalent

$$(k-1)(p-1)=2.$$

Da $k-1 \geq 2$ und $p-1 \geq 1$, muss $k-1=2$ und $p-1=1$ gelten, also $k=3$ und $p=2$. Daraus ergibt sich $d_1 = 1$, $d_2 = 2$ und $d_3 = 4$, also $n = 4$.

Tatsächlich ist $n = 4$ eine Lösung.

(Heinrich Josef Gstöttner) □

Lösung 2. Es gilt $d_{k-1} = n/d_2$ und $d_{k-2} = n/d_3$ und daher

$$\frac{k-2}{k-1} = \frac{d_{k-1}-d_{k-2}}{d_k-d_{k-1}} = \frac{\frac{n}{d_2}-\frac{n}{d_3}}{\frac{n}{d_1}-\frac{n}{d_2}} = \frac{d_1}{d_3}\frac{d_3-d_2}{d_2-d_1} = \frac{d_1}{d_3}\cdot\frac{2}{1} = \frac{2}{d_3}.$$

Da $d_3 \geq 3$, folgt

$$\frac{k-2}{k-1} \leq \frac{2}{3} \iff 3k-6 \leq 2k-2 \iff k \leq 4$$

mit Gleichheit genau für $k = 4$ und $d_3 = 3$.

Für $k = 4$ gilt also $d_3 = 3$ und damit $d_2 = 2$, somit $n = 6$, jedoch

$$(d_2-d_1):(d_3-d_2):(d_4-d_3) = 1:1:3,$$

ein Widerspruch.

Somit muss $k = 3$ und $n = p^2$ für eine Primzahl p gelten. Gefordert ist nun

$$(p-1):(p^2-p) = 1:2 \iff 1:p = 1:2,$$

also $p = 2$ und $n = 4$.

Somit ist $n = 4$ die einzige Lösung.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Sei $p = d_2$ die kleinste Primzahl, die n teilt. Es gilt

$$\begin{aligned} n-1 &= d_k - d_1 \\ &= (d_2-d_1)+(d_3-d_2)+\cdots+(d_k-d_{k-1}) \\ &= (d_2-d_1)\left(1+2+\cdots+(k-1)\right) \\ &= (p-1)\frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

und $n - \frac{n}{p} = d_k - d_{k-1} = (k-1)(d_2-d_1) = (k-1)(p-1)$, also $n = p(k-1)$.

Fall 1: $k-1$ ist ungerade. Daraus folgt: $k-1$ teilt $\operatorname{ggT}(n-1,n) = 1$, also $k = 2$, das ist aber für eine zusammengesetzte Zahl unmöglich.

Fall 2: $k-1$ ist gerade. Daraus folgt: $(k-1)/2$ teilt $\operatorname{ggT}(n-1,n) = 1$, also $k = 3$ und somit $n = p^2$. Wegen $n = p(k-1)$ und $k = 3$, ergibt sich daraus $p = 2$ und $n = 4$, was auch funktioniert und somit die einzige Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4. Sei p der kleinste Primteiler von n.

Wie in Lösung 1a erhalten wir

$$d_j = 1 + \frac{(j-1)j}{2}(p-1).$$

Wir untersuchen zunächst den Fall $p = 2$. Die ersten Glieder dieser Folge lauten

j	1	2	3	4	5	6	7	8
d_j	1	2	4	7	11	16	22	29

Nach Voraussetzung ist $k \geq 3$. Damit ist $d_3 = 4$ ein Teiler von n. Falls nun $k = 3$, so ist $n = 4$ eine Lösung. Andernfalls ist $d_4 = 7$ ein Teiler von n und daher $28 \mid n$. Allerdings tritt 28 in obiger Tabelle nicht auf, was einen Widerspruch darstellt.

Nun untersuchen wir den Fall $p = 3$. Die ersten Glieder der Folge lauten nun

j	1	2	3	4	5	6	7
d_j	1	3	7	13	21	31	43

Da $k \geq 3$, gilt $d_2 d_3 = 21 \mid n$. Damit ist aber auch $k \geq 4$ und $13 \mid n$, insgesamt also $3 \cdot 13 \mid n$. Das ist ein Widerspruch zu den Werten in der Tabelle.

Sei nun $p \geq 5$, p prim. Es gilt $d_2 = p$ und $d_3 = 3p-2$. Da $p \neq 2$, gilt $\operatorname{ggT}(d_2,d_3) = \operatorname{ggT}(p, 3p-2) = \operatorname{ggT}(p,-2) = 1$. Daher ist auch $d_2 d_3 = p(3p-2)$ ein Teiler von n. Es muss nach der expliziten Darstellung der Teiler also ein ℓ geben, sodass

$$d_2 d_3 = p(3p-2) = 1 + \frac{(\ell-1)\ell}{2}(p-1).$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$3p^2 - 2p - 1 = \frac{(\ell-1)\ell}{2}(p-1).$$

Da $3p^2 - 2p - 1 = (3p+1)(p-1)$, können wir $p-1$ kürzen. Nach Multiplikation mit 8 und Addition von 1 ergibt sich

$$24p + 9 = 4\ell^2 - 4\ell + 1 = (2\ell-1)^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 3 und daher die rechte Seite als Quadratzahl durch 9 teilbar. Daraus folgt $9 \mid 24p$, also $3 \mid p$, also gilt $p = 3$ (da p prim ist), was im Widerspruch zu $p \geq 5$ steht.

(Stefan Leopoldseder, Clemens Heuberger) □

Lösung 4a. Für n gerade ist $n = 4$ die einzige Lösung: siehe Lösung 4.
Wir zeigen, dass es keine ungeraden Lösungen gibt.

Wir zeigen durch vollständige Induktion:

$$d_j < 3d_{j-1}, \qquad j = 3, 4, \ldots, k$$

Induktionsbasis $j = 3$: $d_3 - d_2 = 2(d_2 - 1) \implies d_3 = 3d_2 - 2 < 3d_2$.
Induktionsschritt $j \to j + 1$: Für $j \geq 3$ gilt wegen $d_{j+1} - d_j = j(d_2 - 1)$

$$d_{j+1} = d_j + j(d_2 - 1) < 3d_{j-1} + j(d_2 - 1) < 3d_{j-1} + 3(j-1)(d_2 - 1) = 3d_{j-1} + 3(d_j - d_{j-1}) = 3d_j$$

Für $j = k$ folgt also $\dfrac{d_k}{d_{k-1}} < 3$ im Widerspruch zu $\dfrac{d_k}{d_{k-1}} = d_2 \geq 3$.

(Laurenz Kohlbach) □

Lösung 4b. Für n gerade ist $n = 4$ die einzige Lösung: siehe Lösung 4.
Wir zeigen, dass es keine ungeraden Lösungen gibt. Da d_2 ungerade ist, gibt es ein $l \in \mathbb{Z}^+$ mit $d_2 = 2l+1$.
Wie in Lösung 1 erhalten wir

$$d_{j+1} = \frac{(j+1)j}{2}(d_2 - d_1) + 1 = (j+1)jl + 1.$$

Wegen $d_{j+1} - d_j = 2jl$, $\operatorname{ggT}(jl, d_{j+1}) = 1$ und $\operatorname{ggT}(2, d_{j+1}) = 1$ gilt $\operatorname{ggT}(d_j, d_{j+1}) = 1$ für $j = 1, \ldots, k-1$.
Das ist ein Widerspruch zu $d_{k-1} \mid d_k = n$.

(Simon Wegan) □

Lösung 5. Aus den gegebenen Proportionen folgt

$$\frac{d_{k-1} - 1}{d_k - d_{k-1}} = \frac{(d_{k-1} - d_{k-2}) + (d_{k-2} - d_{k-3}) + \ldots + (d_2 - d_1)}{d_k - d_{k-1}} =$$
$$= \frac{k-2}{k-1} + \frac{k-3}{k-1} + \ldots + \frac{1}{k-1} = \frac{(k-1)(k-2)/2}{k-1} = \frac{k-2}{2}.$$

Für den Zähler gilt $d_{k-1} - 1 = \dfrac{n}{d_2} - 1 \leq \dfrac{n}{2} - 1$ und für den Nenner gilt $d_k - d_{k-1} = n - \dfrac{n}{d_2} \geq n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{n}{2}$.
Damit wird

$$\frac{k-2}{2} = \frac{d_{k-1} - 1}{d_k - d_{k-1}} \leq \frac{\frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2}} < 1,$$

daraus folgt $k - 2 < 2$, das heißt $k < 4$ und somit $k = 3$. Also muss $n = p^2$ (p prim) gelten.
Wegen $d_1 = 1$, $d_2 = p$, $d_3 = p^2$ erhalten wir

$$\frac{p-1}{p^2 - p} = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

mit $n = 4$ als einziger Lösung.

(Florian Fürnsinn) □

Lösung 6. Bezeichne $x := d_k - d_{k-1}$. Gemäß der Verhältnisse gilt:

$$\begin{aligned} d_{k-1} - d_{k-2} &= x \cdot \frac{k-2}{k-1} \\ d_{k-2} - d_{k-3} &= x \cdot \frac{k-3}{k-1} \\ &\vdots \\ d_2 - d_1 &= x \cdot \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

Addieren wir diese Distanzen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} n-1 &= d_k - d_1 \\ &= d_k - d_{k-1} + d_{k-1} - d_{k-2} + \cdots + d_3 - d_2 + d_2 - d_1 \\ &= x + x \cdot \frac{k-2}{k-1} + \cdots + x \cdot \frac{2}{k-1} + x \cdot \frac{1}{k-1} \\ &= x \cdot \frac{1}{k-1} \cdot ((k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1) \\ &= x \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{x \cdot k}{2}\ . \end{aligned}$$

Den zweitgrößten Teiler einer Zahl erhält man, indem man die Zahl durch ihren kleinsten Primteiler p teilt, also

$$d_{k-1} = \frac{n}{p} \le \frac{n}{2}$$

und somit

$$x = d_k - d_{k-1} = n - d_{k-1} \ge n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\ .$$

Also gilt

$$n - 1 = \frac{x \cdot k}{2} \ge \frac{n \cdot k}{4}\ .$$

Für $k \ge 4$ würde somit $n - 1 \ge n$ gelten, ein Widerspruch.

Somit bleibt nur noch der Fall $k = 3$ zu betrachten (da nach Angabe die Zahl zusammengesetzt ist und somit mindestens 3 Teiler hat). Eine Zahl hat nur dann genau 3 Teiler, wenn sie das Quadrat einer Primzahl ist, also $n = p^2$. Dann gilt $1 : 2 = (p-1) : (p^2 - p) = (p-1) : p(p-1) = 1 : p$, also $p = 2$. Wie wir leicht überprüfen können, ist $n = 2^2 = 4$ tatsächlich eine Lösung.

(Birgit Vera Schmidt) □