46. Österreichische Mathematik Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

1. Teil 1. Mai 2015

Aufgabe 1. *Man zeige*

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \geq (a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d.

Wann gilt Gleichheit?

(Georg Anegg)

Lösung 1. Wir wenden zunächst die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung auf die Terme $a+b$, $b+c$, $c+d$ und $d+a$ an und dann die quadratisch-arithmetische Mittelungleichung auf die Terme a, b, c, d an und erhalten:

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) &\leq \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)}{4}\right)^4 \\ &= 16\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \leq 16\left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\right)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.\end{aligned}$$

In der ersten Ungleichung gilt Gleichheit genau für $a=c$, $b=d$, in der zweiten Ungleichung gilt Gleichheit genau für $a=b=c=d$.

Also gilt insgesamt Gleichheit genau für $a=b=c=d$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gelten

$$(a+b)(c+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2$$

und

$$(b+c)(d+a) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2.$$

Es reicht daher zu zeigen, dass

$$(1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq (a+b+c+d)^2. \tag{1}$$

Das ist aber gerade Cauchy-Schwarz für die Quadrupel $(1,1,1,1)$ und (a,b,c,d). Für Gleichheit in der letzten Ungleichung muss daher $a=b=c=d$ gelten, in diesem Fall gilt auch Gleichheit in der ursprünglichen Ungleichung, also gilt Gleichheit genau für $a=b=c=d$.

(Georg Anegg) □

Lösung 3. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gelten

$$(a+b)(c+d) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2$$

und

$$(b+c)(d+a) \leq \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2.$$

Es reicht daher zu zeigen, dass

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2. \tag{2}$$

Das ist aber gerade die Ungleichung zwischen dem quadratischen und dem arithmetischen Mittel.

Für Gleichheit in der letzten Ungleichung muss $a = b = c = d$ gelten, in diesem Fall gilt auch Gleichheit in der ursprünglichen Ungleichung, also gilt Gleichheit genau für $a = b = c = d$.

Bemerkung: Die Gleichung (2) ist äquivalent zu

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd),$$

was wiederrum äquivalent ist zu

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2 \geq 0.$$

(Georg Anegg) □

Lösung 4. Ausmultiplizieren auf beiden Seiten ergibt die folgende äquivalente Ungleichung:

$$\begin{aligned} &a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 + c^4 + 2a^2d^2 + b^2d^2 + 2c^2d^2 + d^4 \geq \\ &\quad a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^2bd + ab^2d + a^2cd + 2abcd + b^2cd + ac^2d + bc^2d + abd^2 + acd^2 + bcd^2. \end{aligned} \tag{3}$$

In zyklischer Summenschreibweise ergibt das

$$\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2c^2 \geq \sum_{cyc} a^2bc + \sum_{cyc} ab^2c + \sum_{cyc} abc^2 + 2abcd.$$

Wir versuchen nun, Terme der linken Seite mit Hilfe der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gegen Terme der rechten Seite abzuschätzen. Da auf beiden Seiten gleich viele Terme stehen, können wir immer zyklische Terme am Ende gegen $2abcd$ abschätzen, und wir müssen uns also nur überlegen, wie wir $\sum_{sym} a^2bc$ erzeugen können.

Mit zwei aufeinanderfolgenden Termen der Form a^2b^2 und b^2c^2 erhalten wir schon die Terme der Form ab^2c,

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} \geq ab^2c, \tag{4}$$

und somit durch zyklische Permutation

$$\sum_{cyc} a^2b^2 \geq \sum_{cyc} ab^2c.$$

Mit a^2c^2 und a^2b^2 erhalten wir a^2bc:

$$\frac{a^2c^2 + a^2b^2}{2} \geq a^2bc. \tag{5}$$

Durch zyklische Permutation erhalten wir

$$\frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2b^2 + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2c^2 \geq \sum_{cyc} a^2bc.$$

Es bleiben also nur mehr links die Terme $\sum_{sym} a^4 + \frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2b^2$ und rechts $\sum_{cyc} abc^2 + 2abcd$.

Um aus den vierten Potenzen Terme der Form abc^2 erhalten, muss einer von drei Termen jeweils doppelt so stark gewichtet werden:

$$\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{2}c^4 \geq abc^2, \tag{6}$$

durch zyklische Permutation also $\sum_{cyc} a^4 \geq \sum_{cyc} abc^2$.

Die verbleibenden Terme sind dann nur mehr

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2}{4} \geq abcd, \tag{7}$$

was durch eine weitere Anwendung der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung gezeigt werden kann.

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger) □

Lösung 4a. Wir multiplizieren die gegebene Ungleichung aus und erhalten

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 \geq{}& \\ a^2bc + a^2bd + a^2cd + ab^2c + ab^2d + abc^2 + abd^2 + ac^2d + acd^2 + b^2cd + bc^2d + bcd^2& \\ + 2abcd + a^2c^2 + b^2d^2&.\end{aligned}$$

In symmetrischer Summenschreibweise ergibt sich die äquivalente Ungleichung

$$\frac{1}{6}\sum_{sym} a^4 + \frac{1}{2}\sum_{sym} a^2b^2 \geq \frac{1}{2}\sum_{sym} a^2bc + \frac{1}{12}\sum_{sym} abcd + (a^2c^2 + b^2d^2).$$

Nach der Muirhead-Ungleichung gelten $\sum_{sym} a^2b^2 \geq \sum_{sym} a^2bc$ und $\frac{1}{12}\sum_{sym} a^4 \geq \frac{1}{12}\sum_{sym} abcd$; letzteres ist auch eine unmittelbare Folge der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung.

Damit kann die Ungleichung zu

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{2} = \frac{1}{12}\sum_{sym} a^4 \geq a^2c^2 + b^2d^2$$

verschärft werden. Das ist eine Folge der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung in den Gestalten

$$\frac{a^4 + c^4}{2} \geq a^2c^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{b^4 + d^4}{2} \geq b^2d^2.$$

Statt der Muirhead-Ungleichung kann man auch die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung in der Gestalt

$$\frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} \geq a^2bc$$

verwenden und erhält durch symmetrische Summation $\sum_{sym} a^2b^2 \geq \sum_{sym} a^2bc$.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 5. Laut quadratisch-arithmetischer Mittelungleichung gilt

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

und damit

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{2} \cdot \frac{c^2 + d^2}{2} \cdot \frac{d^2 + a^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+d}{2} \cdot \frac{d+a}{2}.$$

Weiters gilt laut arithmetisch-geometrischer Mittelungleichung für die Zahlen $\frac{a^2+b^2}{2}, \ldots, \frac{d^2+a^2}{2}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = \Big(\frac{1}{4}\Big(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+\frac{d^2+a^2}{2}\Big)\Big)^2$$
$$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{b^2+c^2}{2}\cdot\frac{c^2+d^2}{2}\cdot\frac{d^2+a^2}{2}}.$$

Insgesamt erhalten wir nach Multiplikation mit 16 die zu zeigende Ungleichung.

Gleichheit gilt in den quadratisch-arithmetischen Mittelungleichungen jeweils für $a = b$, $b = c$, $c = d$ und $d = a$, also für $a = b = c = d$. In diesem Fall gilt auch in der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung Gleichheit.

(Sara Kropf) □

Lösung 6. Wir zeigen zunächst die Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b)(c+d). \tag{8}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ac+bc+ad+bd \\ \iff\quad & a^2-2ac+c^2+c^2-2bc+b^2+b^2-2bd+d^2+d^2-2ad+a^2 \geq 0 \\ \iff\quad & (a-c)^2+(c-b)^2+(b-d)^2+(a-d)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich wahr und Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = c = b = d = a$. Damit ist (8) gezeigt.

Analog zeigen wir die Ungleichung

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (b+c)(d+a) \iff (a-c)^2+(c-d)^2+(d-b)^2+(b-a)^2 \geq 0. \tag{9}$$

Multiplikation von (8) und (9) ergibt die zu zeigende Ungleichung.

Bemerkung: Die beiden Bedingungen (8) und (9) folgen sofort aus der Umordnungsungleichung, da Ausmultiplizieren der rechten Seite $ac+cb+bd+da$ bzw. $ab+bd+dc+ca$ ergibt.

(Heinrich Josef Gstöttner) □

Aufgabe 2. *Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC < AB$ und mit Umkreisradius R. Der Punkt D sei der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt A. Der Punkt T liege so auf der Geraden AD, dass $AT = 2R$ gilt und D zwischen A und T liegt.*

Der Mittelpunkt des Umkreisbogens BC, der A nicht enthält, werde mit S bezeichnet.

Man zeige: $\sphericalangle AST = 90°$.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wie üblich bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BCA$ mit α, β bzw. γ. Der Umkreismittelpunkt werde mit O bezeichnet, vgl. Abbildung 1.

Aufgrund der Voraussetzung $AC < AB$ gilt $\beta < \gamma$. Der Punkt E sei der zu A diametral gegenüberliegende Punkt auf dem Umkreis von ABC.

Da der Winkel γ ein spitzer Winkel ist, gilt nach dem Zentriwinkelsatz $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Da die Sehnen SC und SB gleich lang sind, liegt S auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$. Nun gilt

$$\sphericalangle EAS = \sphericalangle BAS - \sphericalangle BAO = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle AOB) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180° - 2\gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°.$$

Wegen

$$\sphericalangle SAT = \sphericalangle SAC - \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2} - (90° - \sphericalangle ACD) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°$$

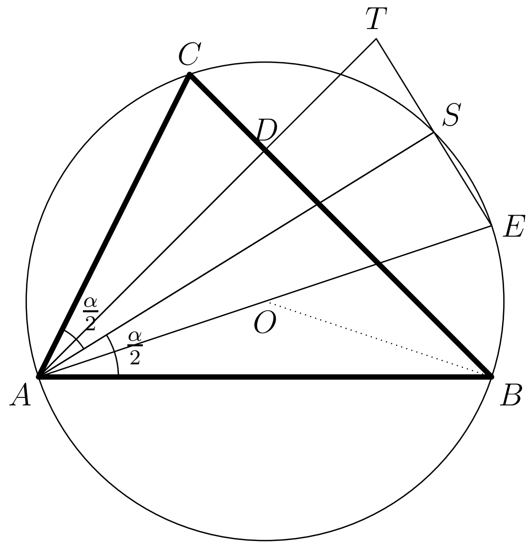

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

gilt somit $\sphericalangle EAS = \sphericalangle TAS$. Da auch $AE = AT = 2R$ gilt, sind die Dreiecke ASE und AST (nach dem Seiten-Winkel-Seiten-Satz) kongruent, und es gilt $\sphericalangle AST = \sphericalangle ASE$. Da $\sphericalangle ASE = 90°$ nach dem Satz von Thales gilt, ist die Behauptung gezeigt.

(Robert Geretschläger) □

Lösung 2. Wie üblich bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BCA$ mit α, β bzw. γ. Der Umkreismittelpunkt werde mit O bezeichnet, vgl. Abbildung 2.

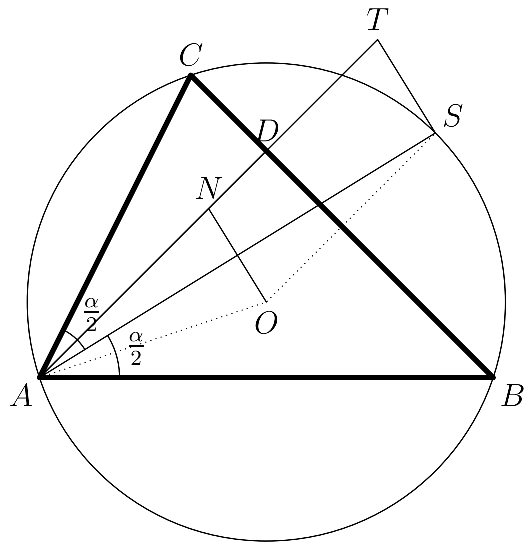

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Aufgrund der Voraussetzung $AC < AB$ gilt $\beta < \gamma$. Es sei N der Halbierungspunkt der Strecke AT, also $AN = NT = R$.

Da der Winkel γ ein spitzer Winkel ist, gilt nach dem Zentriwinkelsatz $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Da die Sehnen SC und SB gleich lang sind, liegt S auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$. Es gilt

$$\sphericalangle SAO = \sphericalangle SAB - \sphericalangle OAB = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle BOA) = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180° - 2\gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°$$

und

$$\sphericalangle DAS = \sphericalangle CAS - \sphericalangle CAD = \frac{\alpha}{2} - (90° - \gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90°,$$

somit $\sphericalangle SAO = \sphericalangle DAS$. Daher steht ON normal auf AS.

Da AOS gleichschenkelig ist und damit $\sphericalangle OSA = \sphericalangle SAO = \sphericalangle TAS$, sind OS und AT parallel. Das Viereck $OSTN$ ist ein Parallelogramm, da $OS = NT = R$ und OS parallel zu NT ist. Daher ist auch ST parallel zu NO und steht normal auf AS.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Wie üblich bezeichnen wir die Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle BCA$ mit α, β bzw. γ. Aufgrund der Voraussetzung $AC < AB$ gilt $\beta < \gamma$. Im Gegensatz zur Angabe sei T auf dem Strahl AD so festgelegt, dass $\sphericalangle TSA = 90°$, vgl. Abbildung 3. Zu zeigen ist dann, dass $AT = 2R$.

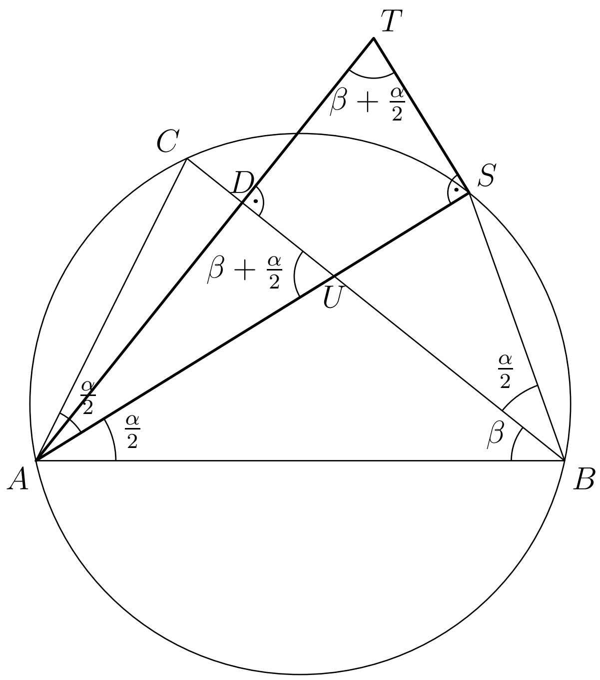

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

Da die Sehnen SC und SB gleich lang sind, liegt S auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BAC$. Damit ist $\sphericalangle SAB = \alpha/2$. Da $ABSC$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle CBS = \sphericalangle CAS = \alpha/2$. Nach dem Sinussatz im Dreieck ABS gilt $AS = 2R\sin(\beta + \alpha/2)$.

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von AS und BC mit U. Der Winkel $\sphericalangle CUA$ ist als Außenwinkel des Dreiecks AUB gleich $\beta+\alpha/2$. Das Viereck $UDTS$ ist ein Sehnenviereck, daher gilt auch $\sphericalangle STD = \beta+\alpha/2$. Da TSA ein rechtwinkeliges Dreieck ist, gilt $\sin(\beta + \alpha/2) = AS/AT$. Daher gilt

$$AT = \frac{AS}{\sin(\beta + \alpha/2)} = \frac{2R\sin(\beta + \alpha/2)}{\sin(\beta + \alpha/2)} = 2R.$$

(Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Es sei T' der zu A diametral gegenüberliegende Punkt auf dem Umkreis von ABC. Der Winkel $\sphericalangle OAS$ heiße α.

Da O der Umkreismittelpunkt ist und A und S beide auf dem Umkreis liegen, ist das Dreieck AOS gleichschenkelig und es gilt $\sphericalangle OSA = \sphericalangle OAS = \alpha$.

Da S der Mittelpunkt des Kreisbogens BC ist, liegt S auf der Streckensymmetralen von BC. Bekanntlich liegt auch der Umkreismittelpunkt O auf derselben Streckensymmetralen. Also ist SO die Streckensymmetrale von BC, und steht somit insbesondere normal auf BC. Ebenso ist laut Definition AD normal auf BC, also sind AD und OS parallel. Auf Grund des Parallelwinkelsatzes gilt daher $\sphericalangle SAT = \sphericalangle ASO = \alpha$.

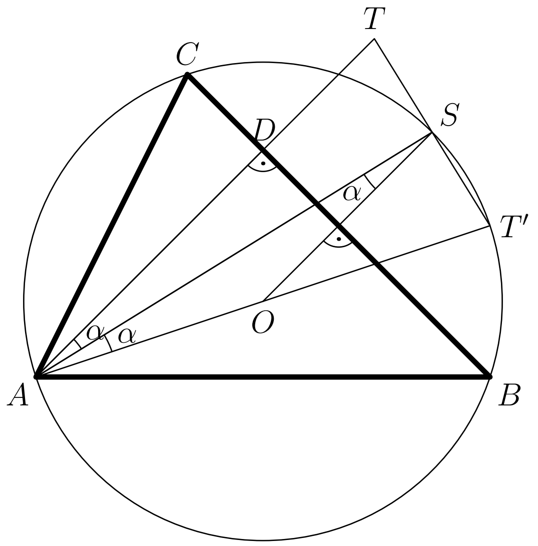

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 4

Betrachten wir die beiden Dreiecke AST und AST', so sehen wir, dass $\sphericalangle SAT = \sphericalangle SAT'$, $AT = 2R = AT'$ und $AS = AS$. Somit sind ein Winkel und die beiden anliegenden Seiten gleich lang, also sind die beiden Dreiecke kongruent.

Es genügt daher zu zeigen, dass $\sphericalangle AST' = 90°$. Dies folgt aber sofort aus dem Thalessatz über dem Durchmesser AT'.

(Hinweis: Diese Lösung funktioniert unverändert auch im stumpfwinkeligen Fall sowie im Fall $AC > AB$.)

(Birgit Vera Schmidt) □

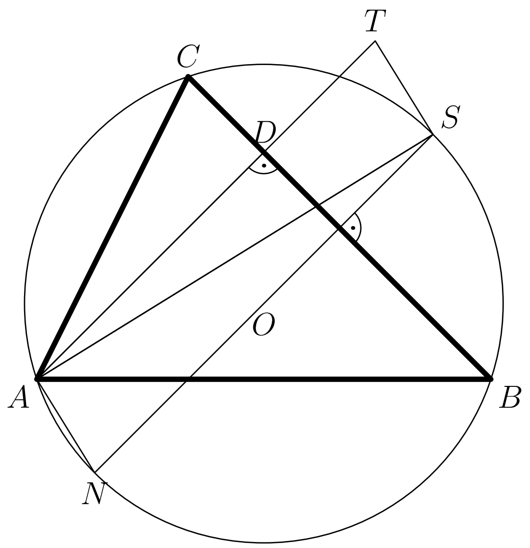

Abbildung 5: Aufgabe 2, Lösung 5

Lösung 5. Da S den Umkreisbogen BC teilt, liegt S (als Südpol) auf der Streckensymmetrale von BC, vergleiche Abbildung 5. Der andere Schnittpunkt dieser Streckensymmetrale mit dem Umkreis heiße N (Nordpol). Da SN ein Durchmesser des Umkreises ist, gilt $SN = 2R$. Weiters gilt $SN \perp BC$.

Da AD eine Höhe auf die Seite BC ist, ist DA parallel zu SN. Außerdem gilt nach Angabe $DA = 2R$ und damit $DA = SN$. Daher ist $STAN$ ein Parallelogramm. Damit sind die Dreiecke SAN und AST kongruent.

Da $\sphericalangle SAN$ nach dem Satz von Thales ein rechter Winkel ist, gilt auch $\sphericalangle AST = 90°$.

(Heinrich Josef Gstöttner) □

Lösung 6. Wir legen ein Koordinatensystem mit Ursprung im Mittelpunkt O des Umkreises des Dreiecks ABC, sodass S die Koordinaten $(1,0)$ hat. Damit hat der Umkreis vom Dreieck ABC die Gleichung $x^2+y^2=1$. Der Eckpunkt A habe die Koordinaten (a_x,a_y). Da er am Umkreis liegt gilt

$$a_x^2+a_y^2=1. \tag{10}$$

Die Seite BC des Dreiecks ABC ist parallel zur y-Achse, da SO die Streckensymmetrale von BC ist. Die Höhe durch den Punkt A auf die Seite BC ist daher parallel zur x-Achse. Da laut Angabe T auf der anderen Seite von BC liegt wie A, und die Streckelänge AT zweimal der Umkreisradius ist, hat T die Koordinaten (a_x+2,a_y).

Damit ist der Vektor $\overrightarrow{TS}=(a_x+1,a_y)$ und der Vektor $\overrightarrow{AS}=(a_x-1,a_y)$. Ihr Skalarprodukt ist laut (10) gleich

$$\overrightarrow{TS}\cdot\overrightarrow{AS}=(a_x+1)(a_x-1)+a_y^2=a_x^2-1+1-a_x^2=0.$$

Daher stehen TS und AS normal auf einander.

(Sara Kropf, nach einer Schülerlösung) □

Aufgabe 3. *Alice und Bob spielen ein Spiel mit einer Schnur, auf der 2015 Perlen aufgereiht sind. Wer am Zug ist, zerschneidet die Schnur zwischen zwei Perlen. Der oder die andere entscheidet, welches der beiden Stücke für den Rest des Spieles verwendet wird. Das andere Stück wird entfernt.*

Alice beginnt, danach wechseln sich die beiden mit dem Zerschneiden ab. Verloren hat, wer am Zug ist und nur eine einzige Perle vor sich hat, sodass kein Schnitt zwischen zwei Perlen mehr möglich ist.

Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1. Durch Betrachten kleiner Zahlen n von Perlen statt 2015 Perlen kommt man rasch zur Vermutung, dass die Gewinnsituationen genau die Perlenschnüre mit einer geraden Anzahl von Perlen sind. Das lässt sich leicht mit Induktion zeigen:

Für $n=1$ liegt nach Angabe eine Verlustsituation vor.

Für ein gerades n lässt sich die Kette durch Abschneiden von einer Perle in zwei ungerade Teilstücke zerlegen, die beide nach Induktionsannahme Verlustsituationen für den anderen Spieler bzw. die andere Spielerin darstellen, sodass das n selbst eine Gewinnsituation ist.

Für ein ungerades n erzeugt jeder Schnitt genau ein gerades Teilstück, das der andere Spieler bzw. die andere Spielerin auswählen kann und somit nach Induktionsannahme eine Gewinnposition vor sich hat. Das ungerade n ist also eine Verlustposition.

Insgesamt hat somit Bob eine Gewinnstrategie.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Da 2015 eine ungerade Zahl ist, kann Alice die Schnur nur so zerschneiden, dass ein Teil mit einer geraden und ein Teil mit einer ungeraden Anzahl von Perlen entsteht. Bob entfernt den Teil mit der ungeraden Perlenzahl und schneidet vom anderen Teil genau eine Perle ab. Dadurch hat Alice keine Wahl. Sie muss die einzelne Perle entfernen, weil sie ansonsten sofort verlieren würde. Sie hat daher wieder eine ungerade Anzahl von Perlen vor sich und wenn sie einen Schnitt macht, übergibt sie Bob zwei Teile, von denen einer eine gerade und der andere eine ungerade Anzahl von Perlen hat.

Bob entfernt immer die ungerade Anzahl von Perlen und schneidet von der geraden Anzahl eine einzelne Perle ab. Alice hat immer nur die Möglichkeit, die einzelne Perle zu entfernen und den Rest der Kette in einen geraden und einen ungeraden Teil zu zerschneiden.

Da die Anzahl der Perlen in jeder Runde mindestens um 1 kleiner wird und Alice immer eine ungerade Anzahl von Perlen zum Zerschneiden bekommt, liegt irgendwann eine einzelne Perle vor Alice — und dann hat sie verloren.

(Richard Henner) □

Aufgabe 4. *Eine* Polizeinotrufzahl *sei eine positive ganze Zahl, die im Dezimalsystem auf die Ziffern* 133 *endet. Man beweise, dass jede Polizeinotrufzahl einen Primteiler größer als* 7 *besitzt.*

(Robert Geretschläger)

Lösung 1. Nehmen wir an, es wäre n eine Polizeinotrufzahl mit $n = 2^a3^b5^c7^d$. Wäre n durch 2 oder 5 teilbar, so wäre die letzte Ziffer von n gleich 0, 2, 4, 5, 6 oder 8. Da dies nicht der Fall ist, muss also $n = 3^b7^d$ gelten.

Nun bemerken wir, dass $3^4 = 81$, $3 \cdot 7 = 21$ und $7^4 = 2401$ gelten, und somit modulo 20 auch $1 \equiv 3^4 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 7^4$. Es gilt somit modulo 20 sicher eine der Beziehungen

$$n \equiv 1 \ \vee\ n \equiv 3 \ \vee\ n \equiv 3^2 = 9 \ \vee\ n \equiv 3^3 = 27 \equiv 7 \ \vee\ n \equiv 7 \ \vee\ n \equiv 7^2 = 49 \equiv 9 \ \vee\ n \equiv 7^3 = 343 \equiv 3.$$

Da aber andererseits auch $133 \equiv 13 \pmod{20}$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch.

(Robert Geretschläger) □

Lösung 1a. Wie in der vorigen Lösung sehen wir, dass für so eine Zahl $1000k+133 = 3^b7^d$ gelten müsste, und versuchen dies auf einen Widerspruch zu führen.

Modulo 20 gilt $3 \cdot 7 \equiv 1$, also $7 \equiv 3^{-1}$. Daher betrachten wir die rechte Seite der Gleichung modulo 20 und sehen

$$3^b7^d \equiv 3^b \cdot \left(3^{-1}\right)^d = 3^{b-d} = 3^x$$

für eine ganze Zahl x. Modulo 20 kann 3^x nur die Werte 3, 9, 7 und 1 annehmen.

Für die andere Seite der Gleichung gilt aber $1000k + 133 \equiv 13 \pmod{20}$, ein Widerspruch.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 2. Sei $n = 1000k + 133$ eine Polizeinotrufzahl, und nehmen wir an, dass alle ihre Primteiler kleiner oder gleich 7 sind. Es ist an Hand der Einerziffer offensichtlich, dass n ungerade und nicht durch 5 teilbar ist, also muss $1000k + 133 = 3^a7^b$ für passende ganze Zahlen a, $b \geq 0$ gelten.

Daraus folgt $3^a7^b \equiv 133 \pmod{1000}$.

Das impliziert, dass $3^a7^b \equiv 133 \equiv 5 \pmod 8$. Wir wissen, dass 3^a kongruent zu 1 oder 3 modulo 8 und 7^b kongruent zu 1 oder 7 modulo 8 sind. Damit das Produkt 3^a7^b kongruent zu 5 modulo 8 sein kann, müssen 3^a kongruent zu 3 und 7^b kongruent zu 7 sein. Wir schließen daher, dass a und b beide ungerade sind.

Weiters gilt $3^a7^b \equiv 133 \equiv 3 \pmod 5$. Da a und b ungerade sind, sind 3^a und 7^b jeweils kongruent zu 3 oder 2 modulo 5. Weder 3^2, 2^2 noch $3 \cdot 2$ ist kongruent zu 3 modulo 5, ein Widerspruch.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 2 müssen wir $3^a7^b \equiv 133 \pmod{1000}$ auf einen Widerspruch führen.

Modulo 4 erhalten wir

$$3^a7^b \equiv (-1)^{a+b} \equiv 1 \equiv 133 \pmod 4,$$

also muss $a + b$ gerade sein.

Modulo 5 erhalten wir wegen $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$, dass

$$3^a7^b \equiv 3^a2^b \equiv 3^{a-b} \equiv 3 \equiv 133 \pmod 5.$$

Allerdings ist 3^x genau dann kongruent zu 3 modulo 5, wenn $x \equiv 1 \pmod 4$. Damit ist $a - b \equiv 1 \pmod 4$. Daraus folgt

$$a + b \equiv a - b \equiv 1 \pmod 2,$$

ein Widerspruch dazu, dass $a + b$ gerade ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Wie in den vorigen Lösungen sehen wir, dass für so eine Zahl $1000k + 133 = 3^a 7^b$ gelten müsste, und versuchen dies auf einen Widerspruch zu führen.

Modulo 10 gilt $3 \cdot 7 \equiv 1$, also $7 \equiv 3^{-1}$. Daher betrachten wir die Gleichung modulo 10 und sehen

$$\begin{array}{lll} \text{mod } 10: & 1000k + 133 \equiv 3^a 7^b & \\ \Longrightarrow & 3 \equiv 3^a 7^b \equiv 3^a \cdot \left(3^{-1}\right)^b = 3^{a-b} & \Big| \cdot 3^{-1} \\ \Longrightarrow & 1 \equiv 3^{a-b-1}. & \end{array}$$

Für eine ganze Zahl x ist 3^x genau dann kongruent zu 1 modulo 10, wenn x kongruent zu 0 modulo 4 ist. Daher muss $a - b - 1 \equiv 0 \pmod 4$ gelten, also $a = b + 1 + 4\ell$ mit einer ganzen Zahl ℓ.

Betrachten wir $3^a 7^b$ modulo 4, so sehen wir daher

$$3^a 7^b \equiv 3^a 3^b \equiv 3^{a+b} = 3^{(b+1+4\ell)+b} = 3^{2b} \cdot 3^{4\ell} \cdot 3^1 = \left(3^2\right)^b \cdot \left(3^2\right)^{2\ell} \cdot 3 \equiv 1^b \cdot 1^{2\ell} \cdot 3 \equiv 3.$$

Für die andere Seite der Gleichung gilt aber $1000k + 133 \equiv 1 \pmod 4$, ein Widerspruch.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 4. Wie in den vorigen Lösungen sehen wir, dass für so eine Zahl $1000k + 133 = 3^a 7^b$ gelten müsste, und versuchen dies auf einen Widerspruch zu führen.

Wir betrachten dazu diese Gleichung modulo 100. Es gilt $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$ und $7^4 \equiv 1 \pmod{100}$. Wir betrachten daher $3^x 7^y \mod 100$ für $0 \le x < 20$ und $0 \le y < 4$ und erhalten

$\cdot$	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}	3^{14}	3^{15}	3^{16}	3^{17}	3^{18}	3^{19}
7^0	1	3	9	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	7	21	63	89	67
7^1	7	21	63	89	67	1	3	9	27	81	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69
7^2	49	47	41	23	69	7	21	63	89	67	1	3	9	27	81	43	29	87	61	83
7^3	43	29	87	61	83	49	47	41	23	69	7	21	63	89	67	1	3	9	27	81.

Offensichtlich tritt die Zahl 33 nicht auf, Widerspruch.

(SageMath, angeleitet von Clemens Heuberger) □

Lösung 4a. Wie Lösung 4, aber modulo 1000. Nun hat 3 Ordnung 100 und 7 Ordnung 20; die entsprechende Tabelle „marginis exiguitas non caperet“.

(SageMath, angeleitet von Clemens Heuberger) □

Lösung 5. Wie in den vorigen Lösungen sehen wir, dass für so eine Zahl $1000k + 133 = 3^a 7^b$ gelten müsste, und versuchen dies auf einen Widerspruch zu führen.

Lemma. Sei S die Menge der positiven ganzen Zahlen, die kongruent zu 1, 3, 7 oder 9 modulo 20 sind. Dann gilt: Für alle Zahlen $x, y \in S$ ist auch $xy \in S$.

Beweis. Wir betrachten alle möglichen Produkte zweier Zahlen aus dieser Menge modulo 20:

	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

Wir können $3^a 7^b$ anschreiben als

$$(((((((1 \cdot 3) \cdot 3) \cdot 3) \cdot \dots \cdot 3) \cdot 7) \cdot 7) \cdot \dots \cdot 7)\,,$$

wobei genau a Mal mit 3 und dann b Mal mit 7 multipliziert wird. (Sowohl a als auch b können auch 0 sein.)

Wenn wir die Klammern von innen nach außen auflösen, dann sehen wir, dass wir jedes Mal wieder ein Produkt zwischen zwei Zahlen aus S erhalten. Somit ist auch das gesamte Produkt $3^a 7^b \in S$.

Es gilt aber andererseits $133 \equiv 13 \pmod{20}$, ein Widerspruch.

(Clemens Heuberger, Birgit Vera Schmidt, nach einer Schülerlösung) □

Lösung 5a. Das Lemma aus Lösung 5 kann man alternativ auch so anwenden:

Wie in Lösung 4 berechnen wir alle möglichen Werte von 3^i modulo 20 (erste *Zeile* der Tabelle in Lösung 4) und alle möglichen Werte von 7^i modulo 20 (erste *Spalte* der Tabelle).

Wir sehen, dass alle diese Werte den Bedingungen der Menge S genügen. Somit ist gemäß dem Lemma auch jedes $3^a 7^b$ als Produkt zweier Zahlen aus S wieder ein Element von S.

Wie zuvor ist dies ein Widerspruch zu $133 \equiv 13 \pmod{20}$.

(Birgit Vera Schmidt, nach einer Schülerlösung) □

Lösung 5b. Für den Beweis in Lösung 5 reicht auch das folgende schwächere Lemma:

Lemma. Sei S die Menge der positiven ganzen Zahlen, die kongruent zu 1, 3, 7 oder 9 modulo 20 sind. Dann gilt für alle ganzen Zahlen x: Wenn $x \in S$, so ist auch $3x \in S$ und $7x \in S$.

Beweis. Siehe Tabelle in Lösung 5.

(Birgit Vera Schmidt, nach einer Schülerlösung) □

Lösung 5c. Wenn man ohne das Wort „modulo" auskommen möchte, kann man ein zum Lemma aus Lösung 5 äquivalentes Lemma wie folgt aufschreiben und beweisen:

Lemma. Wir betrachten alle positiven ganzen Zahlen, deren Einerstelle 1, 3, 7 oder 9 ist, und deren Zehnerstelle gerade ist. Dann hat jedes Produkt zweier solcher Zahlen wieder 1, 3, 7 oder 9 als Einerstelle und eine gerade Zehnerstelle.

Beweis. Seien x und y zwei Zahlen, die diesen Bedingungen genügen. Die Zahl x ende auf die Ziffern $[ba]$ und y auf die Ziffern $[BA]$, also $x = 100c + 10b + a$ und $y = 100C + 10B + A$ mit ganzen Zahlen $a, A \in \{1, 3, 7, 9\}$, ganzen Zahlen $b, B \in \{2, 4, 6, 8, 0\}$ und ganzen Zahlen $c, C \geq 0$.

Dann gilt

$$x \cdot y = 10000cC + 1000bC + 1000cB + 100aC + 100bB + 100cA + 10aB + 10bA + aA\,.$$

Alle Terme, die mit 10000, 1000 oder 100 multipliziert werden, haben keine Auswirkung auf die Zehner- und Einerstelle des Produkts xy. Die Einerstelle des Produktes ist gleich der Einerstelle vom Produkt aA. Da $a, A \in 1, 3, 7, 9$ sind, ist auch $aA \in 1, 3, 7, 9$ gemäß der folgenden Tabelle:

	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	21	27
7	7	21	49	63
9	9	27	63	81

Die Zehnerstelle setzt sich zusammen aus aB, bA und der Zehnerstelle von aA. Aus der Tabelle sehen wir, dass die Zehnerstelle von aA immer gerade ist. Da b und B nach Voraussetzung gerade sind, sind auch aB und bA gerade. Die Summe $aB + bA +$ Zehnerstelle(aA) ist als Summe dreier gerader Zahlen daher ebenfalls gerade, und somit ist alles bewiesen.

(Birgit Vera Schmidt, nach einer Schülerlösung) □