55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

11. Juni 2024

Aufgabe 1. *Seien x und y positive reelle Zahlen mit $x+y=1$. Man zeige, dass*

$$\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}\geq 6.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Antwort. Gleichheit gilt genau für $x=y=\frac{1}{2}$.

Lösung 1. Es gilt

$$\frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}=\frac{x+x+y}{y}+\frac{y+x+y}{x}=2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2.$$

Wegen $x,y>0$ folgt mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung

$$\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=1$$

sofort die Behauptung. Gleichheit gilt für $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$, also für $x=y=\frac{1}{2}$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wegen $x,y>0$ lässt sich die Ungleichung folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{y}+\frac{y+1}{x}\geq 6\\
\iff\quad & x^2+x+y^2+y\geq 6xy\\
\iff\quad & (x+y)^2+(x+y)=2=2(x+y)^2\geq 8xy\\
\iff\quad & x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig. Gleichheit gilt genau für $x=y=\frac{1}{2}$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Wegen $x,y>0$ lässt sich die Ungleichung unter Verwendung von $y=1-x$ folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned}
& \frac{x+1}{1-x}+\frac{2-x}{x}\geq 6\\
\iff\quad & 2x^2-2x+2\geq 6x-6x^2\\
\iff\quad & 4x^2-4x+1\geq 0\\
\iff\quad & (2x-1)^2\geq 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich richtig. Gleichheit gilt genau für $x=\frac{1}{2}=y$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 4. Wegen $x, y > 0$ erhält man unter mehrfacher Verwendung der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \geq 2 + \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq 2 + \frac{2}{\frac{x+y}{2}} = 6.$$

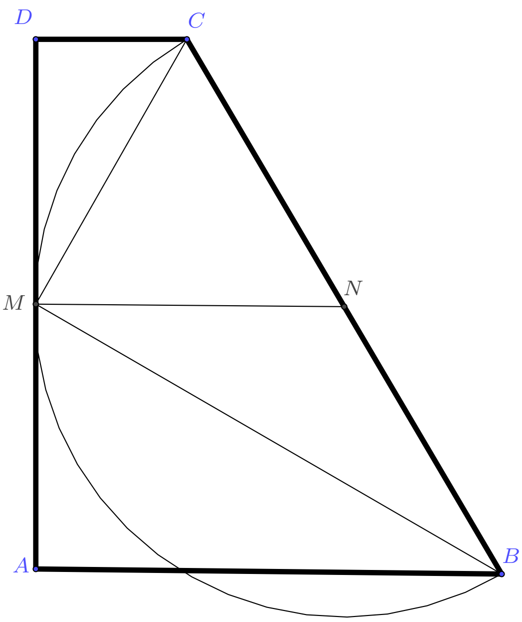
Gleichheit gilt genau für $x = y = \frac{1}{2}$.

(Reinhard Razen) □

Aufgabe 2. *Sei $ABCD$ ein Trapez mit den Parallelseiten AB und CD, mit $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ und mit $AB + CD = BC$. Sei weiters M der Mittelpunkt von AD.*

Man zeige, dass $\sphericalangle CMB = 90^\circ$.

(Karl Czakler)



Lösung 1.

Sei N der Mittelpunkt von BC. Dann ist MN parallel zu AB bzw. CD und es gilt

$$MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{BC}{2}.$$

Daher liegen die Punkte B, M, C auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt N. Mit dem Satz von Thales folgt $\sphericalangle CMB = 90^\circ$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Spiegelt man den Punkt B an M, so erhält man den Punkt E mit $ED = AB$. Damit ist $EC = BC$, also ist BCE ein gleichschenkeliges Dreieck. Der Mittelpunkt der Basis ist M, dadurch ist $\angle CMB = 90^\circ$.

Bemerkung. Analog kann man auch C an M spiegeln.

(Lukas Donner) □

Lösung 2a. Spiegelt man die Punkte B und C an M so erhält man Punkte E bzw, F. Dann gilt $EC = BF = AB + FA = AB + CD = BC = EF$, das Viereck $BCEF$ ist also eine Raute. Da in einer Raute die Diagonalen aufeinander normal stehen, gilt $BE \perp CF$ und es folgt $\sphericalangle BMC = 90°$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir bezeichnen die Seitenlängen mit $a := AB$, $c := CD$, $d := DA$ und $b := BC = a + c$. Der gesuchte Winkel sei $\varphi := \angle CMB$. Es sei F der Fußpunkt der Normale auf AB durch C. Damit ist $AFCD$ ein Rechteck, also $CF = d$. Außerdem ist $BF = |a - c|$. Damit erhalten wir mit Pythagoras:

$$d = \sqrt{(a+c)^2 - |a-c|^2} = 2\sqrt{ac}.$$

Ebenfalls mit Pythagoras erhalten wir:

$$BM = \sqrt{a^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + ac}$$
$$CM = \sqrt{c^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 + ac}.$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck CMB gilt also

$$(a+c)^2 = \left(a^2 + ac\right) + \left(c^2 + ac\right) - 2\sqrt{(a^2+ac)\,(c^2+ac)}\cos(\varphi),$$

und damit $\cos(\varphi) = 0$. Da der Winkel φ offensichtlich zwischen 0° und 180° liegt, muss also $\varphi = 90°$ sein.

(Michael Reitmeir) □

Aufgabe 3. *Anna, Berta und Clara schreiben die Quadratzahlen* $1, 4, 9, \dots, 2025$ *auf die Tafel, rechnen ihre Summe aus und stellen fest, dass diese durch 3 teilbar ist. Dann vereinbaren sie folgendes Spiel: In jeder Runde streicht zuerst Anna, dann Berta und dann Clara eine Zahl durch, bis alle Zahlen weg sind. Clara hat dabei das Ziel, dass die Summe der verbleibenden Zahlen nach jeder Runde durch 3 teilbar ist.*

a) *Man beweise, dass Anna nicht verhindern kann, dass Clara ihr Ziel mit Bertas Hilfe erreicht.*

b) *Man beweise, dass Berta verhindern kann, dass Clara ihr Ziel mit Annas Hilfe erreicht.*

(Richard Henner)

Lösung. An der Tafel stehen 15 Zahlen, die den Rest 0, und 30 Zahlen, die den Rest 1 modulo 3 haben. Wenn also Berta und Clara in einer Runde Zahlen streichen, die denselben Rest modulo 3 haben wie die Zahl, die Anna gestrichen hat, dann wurde modulo 3 entweder $0+0+0$ oder $1+1+1$ entfernt. In beiden Fällen ändert sich die Summe modulo 3 nicht und bleibt also durch 3 teilbar. Da die Anzahlen 15 und 30 durch 3 teilbar sind, ist es auch immer möglich, dass Berta und Clara denselben Rest wie Anna wählen. Somit kann Anna nicht verhindern, dass Clara ihr Ziel erreicht.

Wenn hingegen Berta in der ersten Runde einen anderen Rest modulo 3 wählt als Anna, haben sie $0+1$ oder $1+0$ modulo 3 gestrichen. Somit kann Clara nur erreichen, dass in Summe 1 oder 2 modulo 3 nach der ersten Runde gestrichen wurde. In beiden Fällen ist die Summe danach nicht mehr durch 3 teilbar. Somit hat Clara bereits nach der ersten Runde ihr Ziel verfehlt.

(Richard Henner) □

Aufgabe 4. *Man bestimme die größtmögliche Anzahl aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen, sodass jede dieser Zahlen einen gemeinsamen Teiler mit* 2024 *hat, der größer als* 1 *ist.*

(Walther Janous)

Antwort. Die gesuchte Anzahl ist 5.

Lösung 1. Es ist $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Eine ganze Zahl hat also genau dann einen gemeinsamen Teiler mit 2024, der größer als 1 ist, wenn sie durch 2, 11 oder 23 teilbar ist.

Es bezeichne N die gesuchte Anzahl. Nur jede elfte ganze Zahl ist durch 11 teilbar. Das heißt, ist z durch 11 teilbar, dann sind $z+1$, $z+2$, $\ldots$, $z+10$ nicht durch 11 teilbar. Analoges gilt für 23. Von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen sind drei ungerade, und von diesen drei ungeraden Zahlen ist also höchstens eine durch 11 teilbar und höchstens eine durch 23 teilbar. Das zeigt, dass $N \leq 5$ sein muss.

Nun versuchen wir, tatsächlich fünf aufeinanderfolgende Zahlen n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ zu finden, die alle mit 2024 einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben. Das geht zum Beispiel folgendermaßen. Wir wollen:

n	gerade
$n+1$	durch 11 teilbar
$n+2$	gerade
$n+3$	durch 23 teilbar
$n+4$	gerade

Es soll also $n+1 = 11k$ und $n+3 = 23l$ mit k und l ungerade gelten. Subtrahieren wir die zweite Gleichung von der ersten, erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 &= 23l - 11k \\ &= l + 11(2l - k). \end{aligned}$$

Es muss also $l \equiv 2 \pmod{11}$ sein. Mit $l = 13$ kommen wir an unser Ziel, denn $n+3 = 23l = 299$ führt auf $n = 296$ und damit auf die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen 296, 297, 298, 299, 300, welche die gewünschte Eigenschaft haben. Damit ist $N = 5$.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Natürlich kann man die fünf aufeinanderfolgenden Zahlen auch nach diesem Schema finden:

n	gerade
$n+1$	durch 23 teilbar
$n+2$	gerade
$n+3$	durch 11 teilbar
$n+4$	gerade

In diesem Fall ist $n = 206$, 207, 208, 209, 210 die kleinste Möglichkeit. □

Lösung 1b. Wir präsentieren einen alternativen Weg, fünf aufeinanderfolgende Zahlen zu finden, die mit 2024 einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben. Bekanntlich erhält man den Rest einer Zahl modulo 11, indem man die Ziffern abwechselnd addiert und subtrahiert, wobei die letzte Ziffer immer addiert wird. Also ist $23 \equiv -2 + 3 = 1 \pmod{11}$. Da wir eine durch 11 teilbare und eine durch 23 teilbare Zahl haben wollen, die sich um 2 unterscheiden, macht es Sinn, die Zahl 23 zweimal aneinander zu reihen:

$$2323 \equiv -2 + 3 - 2 + 3 = 2 \pmod{11}.$$

Das heißt, $2323 - 2 = 2321$ ist durch 11 teilbar. Außerdem ist 2323 offensichtlich durch 23 teilbar. Damit erhalten wir die fünf Zahlen 2320, 2321, 2322, 2323, 2324 mit der gesuchten Eigenschaft.

(Michael Reitmeir) □