53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

14. Juni 2022

Aufgabe 1. *Man zeige, dass für alle reellen Zahlen x und y mit $x > -1$ und $y > -1$ sowie $x + y = 1$ die Ungleichung*

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{2}{3}$$

gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

Lösung 1. Alle linksseitigen Nenner sind positiv. Die gegebene Ungleichung ist daher äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+y^2+y}{xy+x+y+1} &\geq \frac{2}{3} \\ \frac{x^2+y^2+1}{xy+2} &\geq \frac{2}{3} \\ 3x^2+3y^2+3 &\geq 2xy+4 \\ (x-y)^2+2x^2+2y^2 &\geq 1. \end{aligned}$$

Mit $1 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$(x-y)^2 + x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \iff 2(x-y)^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau für $x = y$, d.h., wegen $x + y = 1$ genau für $x = y = \frac{1}{2}$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir setzen die Nebenbedingung $y = 1-x$ ein und müssen die folgende Ungleichung beweisen:

$$\frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1} \geq \frac{2}{3}.$$

Wir nutzen die Gleichungen $\frac{x}{2-x} = \frac{x-2}{2-x} + \frac{2}{2-x} = -1 + \frac{2}{2-x}$ und analog $\frac{1-x}{x+1} = \frac{-1-x}{x+1} + \frac{2}{x+1} = -1 + \frac{2}{x+1}$. Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\frac{2}{2-x} - 1 - 1 + \frac{2}{x+1} \geq \frac{2}{3} \quad \iff \quad \frac{1}{2-x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{4}{3}.$$

Wegen der Voraussetzungen, dass $x > -1$ und $y > -1$, sind beide Nenner positiv, da $2 - x = 1 + y > 0$ und $x + 1 > 0$. Also können wir mit dem Hauptnenner $3 \cdot (2-x) \cdot (1+x)$ multiplizieren, ohne dass das Ungleichheitszeichen umgedreht wird. Die Ungleichung ist also äquivalent zu

$$3 \cdot (x+1) + 3 \cdot (2-x) \geq 4 \cdot (2-x) \cdot (1+x) \quad \iff \quad 4x^2 - 4x + 1 \geq 0.$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu $(2x-1)^2 \geq 0$. Damit ist auch die ursprüngliche Ungleichung gezeigt mit Gleichheit für $x = \frac{1}{2}$ und $y = 1 - x = \frac{1}{2}$.

(Lukas Donner) □

Lösung 3. Alle Nenner sind positiv. Die gegebene Ungleichung ist daher äquivalent zu

$$3(x^2+x+y^2+y) \geq 2(xy+x+y+1).$$

Mit $x+y=1$ folgt

$$3(x^2+y^2+1) \geq 2(xy+2).$$

Es gilt $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 1$ und daher $x^2+y^2 = 1-2xy$. Setzt man das oben ein, so erhält man

$$3(1-2xy+1) \geq 2xy+4,$$

also

$$2 \geq 8xy \quad \text{bzw.} \quad 1-4xy \geq 0.$$

Mit $(x+y)^2 = 1$ folgt

$$1-4xy = x^2+2xy+y^2-4xy = (x-y)^2 \geq 0$$

und die Ungleichung ist bewiesen. Gleichheit gilt für $x=y$, d.h., wegen $x+y=1$ genau für $x=y=\frac{1}{2}$.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 2. *Gegeben sind ein rechteckiges Spielfeld der Größe 13×2 und beliebig viele Dominosteine der Größen 2×1 und 3×1. Das Spielfeld soll mit solchen Dominosteinen lückenlos und ohne Überlappung überdeckt werden, wobei kein Dominostein über das Spielfeld hinausragen darf. Weiters müssen alle Dominosteine gleich ausgerichtet sein, d. h. ihre langen Seiten müssen parallel zueinander liegen.*

Wie viele derartige Überdeckungen sind möglich?

(Walther Janous)

Antwort. Es sind 257 Überdeckungen möglich.

Lösung. Wir nehmen der terminologischen Einfachheit halber an, dass die längere Seite des Spielfelds waagrecht liegt.
Werden die längeren Seiten der Dominosteine parallel zur kurzen Seite des Spielfeldes nebeneinander auf das Spielfeld gelegt, so können nur solche der Größe 2×1 verwendet werden und alle Steine müssen senkrecht gelegt werden. Für diese Überdeckung gibt es genau eine Möglichkeit.
Werden die längeren Seiten der Dominosteine parallel zur langen Seite des Spielfeldes nebeneinander auf das Spielfeld gelegt, so müssen alle Spielsteine waagrecht gelegt werden. Es seien x bzw. y die jeweilige Anzahl der Dominosteine der Größe 2×1 bzw. 3×1, die für die Überdeckung einer Zeile des Spielfelds verwendet werden. Dann muss $2x+3y=13$ gelten. Man findet sofort als einzige nicht-negative Lösungen dieser diophantischen Gleichung die Werte $x=2$ und $y=3$ bzw. $x=5$ und $y=1$. Man kann also für jede Zeile des Spielfelds entweder $2+3=5$ oder $5+1=6$ Dominosteine verwenden. Unterschiedliche Überdeckungen der Zeile entstehen nun durch die unterschiedlichen Reihenfolgen, in denen die 2×1- bzw. 3×1-Dominosteine auf dem Spielfeld liegen. Die Anzahl dieser Reihenfolgen entspricht im ersten Fall der Anzahl der Möglichkeiten, aus den 5 möglichen Positionen 2 für die 2×1-Dominosteine auszuwählen, somit $\binom{5}{2} = 10$. Analog gibt es im zweiten Fall $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, um die fünf 2×1- Dominosteine auf die 6 Positionen zu verteilen. In Summe gibt es also 16 Möglichkeiten pro Zeile. Da die Überdeckungen in den zwei Zeilen unabhängig voneinander vorgenommen werden können, erhalten wir $16^2 = 256$ mögliche Überdeckungen für beide Zeilen.
Insgesamt sind also $1+256=257$ Überdeckungen möglich.

(Reinhard Razen) □

Aufgabe 3. *Über der Strecke AB mit Mittelpunkt M wird ein Halbkreis errichtet. Sei P ein von A und B verschiedener Punkt auf dem Halbkreis und Q der Halbierungspunkt des Kreisbogens AP. Der Schnittpunkt der Geraden BP mit der Parallelen zu PQ durch M sei S.*

Man zeige, dass $PM = PS$ gilt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Da Q der Halbierungspunkt des Kreisbogens AP ist, steht MQ normal auf die zugehörige Sehne AP. Da mit dem Satz von Thales auch die Gerade BP normal auf AP steht, folgt, dass die Geraden MQ und BP zueinander parallel sind.

Da weiters nach Voraussetzung MS und PQ zueinander parallel sind, ist daher das Viereck $MSPQ$ ein Parallelogramm. Es gilt daher $PS = QM = PM$ (denn QM, PM sind Kreisradien) und alles ist gezeigt.

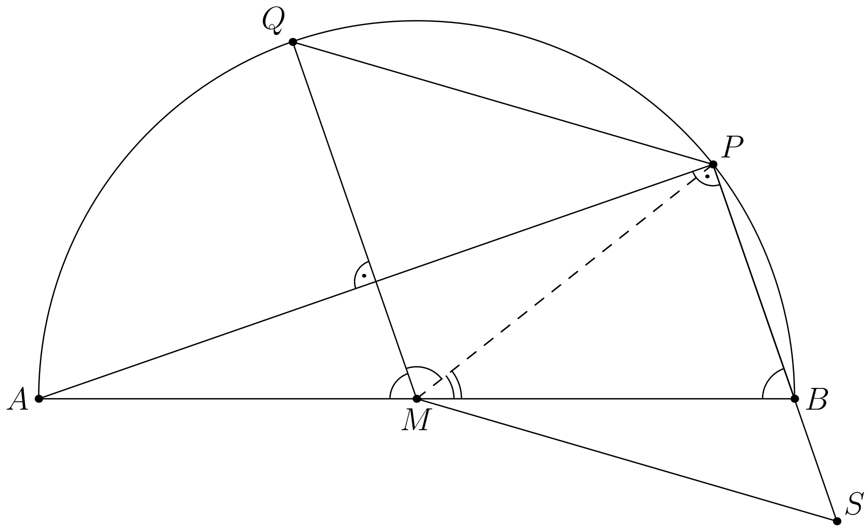

Abbildung 1: Aufgabe 3, Lösung 1

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Da Q der Halbierungspunkt des Kreisbogens AP ist, gilt $\angle QMA = \angle PMQ$. Damit erhalten wir $\angle BMP = \angle BMA - \angle QMA - \angle PMQ = 180° - 2 \cdot \angle QMA$.

Da das Dreieck MBP gleichschenkelig ist mit $BM = PM$, gilt $\angle PBM = 90° - \angle BMP/2 = 90° - (180° - 2 \cdot \angle QMA)/2 = \angle QMA$. Wegen $\angle PBM = \angle PBA = \angle QMA$ sind die Geraden QM und PB parallel. Restlicher Beweis wie in Lösung 1.

(Stefan Leopoldseder) □

Lösung 2. Nach dem Zentriwinkelsatz gilt $\angle PBA = \frac{\angle PMA}{2}$, und wegen $\frac{\angle PMA}{2} = \angle QMA$ sind die Geraden QM und PB (bzw. PS) parallel. Nach Voraussetzung sind PQ und MS ebenfalls parallel. Das Viereck $MSPQ$ ist daher ein Parallelogramm, und somit gilt $PM = QM = PS$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Nach dem Zentriwinkelsatz gilt $\angle PBA = \frac{\angle PMA}{2}$, und wegen $\frac{\angle PMA}{2} = \angle QMA$ sind die Geraden PB und QM parallel, also gilt $\angle MPB = \angle PMQ$ (Parallelwinkel). Nach Voraussetzung sind SM und PQ ebenfalls parallel, also gilt $\angle SMP = \angle QPM$ (Parallelwinkel). Die Dreiecke QMP und SPM stimmen also in zwei Winkeln überein und sind damit ähnlich. Da weiters QMP gleichschenklig ist mit Scheitel M, ist auch SPM gleichschenklig mit Scheitel P, somit gilt $PM = PS$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 4. Wir vervollständigen den Halbkreis zu einem Kreis k. Es sei Q' der zweite Schnittpunkt von QM mit dem Kreis k. Dann sind die Dreiecke AMQ und BMQ' kongruent, also gilt $BQ' = AQ = QP$ (letztere Gleichheit gilt, da Q Halbierungspunkt des Bogens AP ist). Das Viereck $QQ'BP$ ist daher ein gleichschenkeliges Trapez, da vom Durchmesser QQ' die gleich langen Sehnenlängen QP bzw. $Q'B$ auf die selbe Seite des Kreises abgetragen werden.

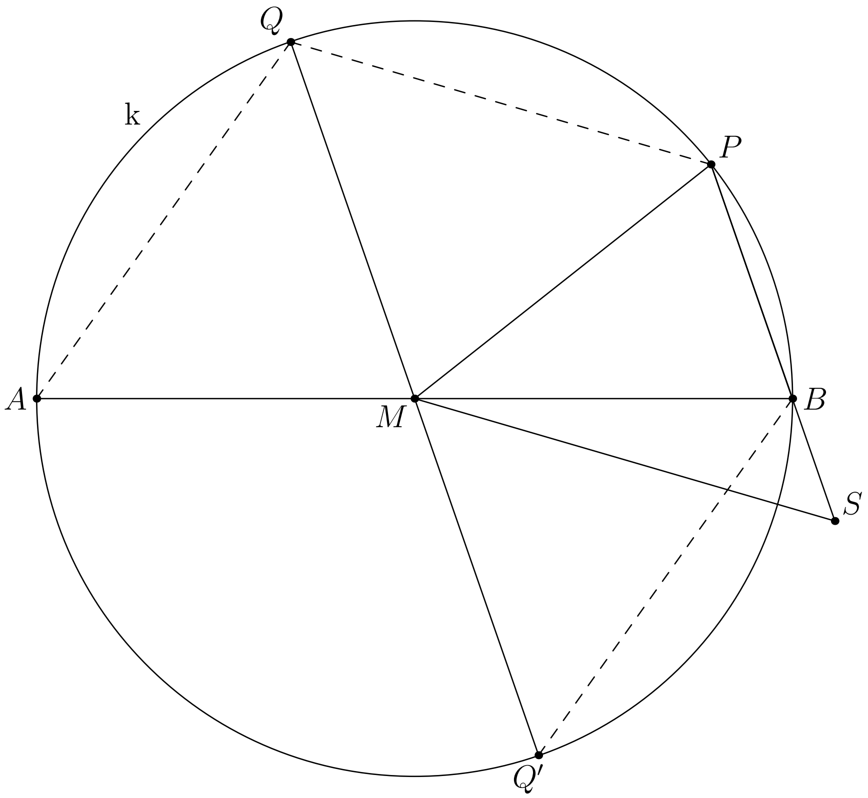

Abbildung 2: Aufgabe 3, Lösung 4

Damit ist PB parallel zu QQ' und somit PS parallel zu QM. Da aber nach Voraussetzung QP parallel zu MS ist, ist $MSPQ$ ein Parallelogramm. Es gilt daher $PS = QM = PM$ und alles ist gezeigt.

(Reinhard Razen) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Primzahlen p, q und r mit $p + q^2 = r^4$.*

(Karl Czakler)

Antwort. Die einzige Lösung ist $p = 7$, $q = 3$, $r = 2$.

Lösung 1. Die gegebene Gleichung kann man in der Form $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$ anschreiben. Da p eine Primzahl ist, folgt $r^2 - q = 1$ und $r^2 + q = p$. Aus $r^2 - q = 1$ folgt $q = r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1)$. Da q eine Primzahl ist, folgt $r - 1 = 1$, also $r = 2$ und $q = 3$. Mit $r^2 + q = p$ erhalten wir $p = 7$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wie in Lösung 1 erhalten wir zunächst $r^2 + q = p$ und $r^2 - q = 1$. Durch Elimination von r^2 folgt $2q = p - 1$, also muss p ungerade sein. Wäre $q = 2$, so wäre $r^2 = 3$, was nicht möglich ist. Daher muss q ebenfalls ungerade sein, dann ist aber r^2 und damit r gerade, also $r = 2$. Daraus folgt $q = r^2 - 1 = 3$ und $p = 2q + 1 = 7$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 3. Wie in Lösung 1 erhalten wir zunächst $r^2 + q = p$ und $r^2 - q = 1$. Für $r = 2$ erhält man daraus für die weiteren Primzahlen $q = r^2 - 1 = 3$ und $p = r^2 + q = 7$. Für $r \geq 3$ wäre q gerade, aber wegen $q = r^2 - 1 \geq 8$ ist es keine Primzahl, somit gibt es in diesem Fall keine Lösung.

(Reinhard Razen) □

Lösung 4. Wie in Lösung 1 erhalten wir zunächst $r^2 + q = p$ und $r^2 - q = 1$. Wegen $r \geq 2$ folgt aus der zweiten Gleichung $q \geq 3$ und aus der ersten Gleichung $p \geq 7$, also sind p und q ungerade Primzahlen. Dann ist aber r^4 und damit r gerade, also $r = 2$. Daraus folgt $q = r^2 - 1 = 3$ und $p = 2q + 1 = 7$.

(Reinhard Razen) □

Lösung 5. Es können nicht alle drei Primzahlen ungerade sein, da sonst die linke Seite gerade, die rechte aber ungerade wäre. Somit muss mindestens eine der Primzahlen gerade, also gleich 2 sein. Wir untersuchen daher folgende Fälle:

- $p = 2$. In diesem Fall ist $2 = r^4 - q^2 = (r^2 + q)(r^2 - q)$. Da 2 eine Primzahl ist, muss $r^2 + q = 2$ und $r^2 - q = 1$ sein. Dies führt aber auf den Widerspruch $q = \frac{1}{2}$.
- $q = 2$. In diesem Fall ist $p = r^4 - 4 = (r^2 + 2)(r^2 - 2)$. Da p eine Primzahl ist, muss $r^2 - 2 = 1$ sein. Dies führt aber auf den Widerspruch $r = \sqrt{3}$.
- $r = 2$. In diesem Fall muss $p + q^2 = 16$ gelten, wofür sich als einzige Lösung $p = 7$ und $q = 3$ ergibt.

(Reinhard Razen) □

Lösung 6. Es können nicht alle drei Primzahlen ungerade sein, da sonst die linke Seite gerade, die rechte aber ungerade wäre. Somit muss mindestens eine der Primzahlen gerade, also gleich 2 sein. Wir untersuchen daher folgende Fälle:

- $p = 2$. In diesem Fall gibt es für $q \in \{2, 3\}$ oder $r \in \{2, 3\}$ keine Lösung. Für $q, r > 3$ ist $p + q^2 = 2 + q^2 \equiv 0 \pmod 3$. Da aber $r^4 \equiv 1 \pmod 3$ ist, gibt es ebenfalls keine Lösung.

  Bemerkung. Für $q, r \geq 3$ lässt sich dies auch modulo 4 zeigen.
- $q = 2$. In diesem Fall gibt es für $p \in \{2, 3\}$ keine Lösung. Für $p > 3$ ist $p + q^2 = p + 4 \equiv 0$ oder $2 \pmod 3$. Da aber $r^4 \equiv 1 \pmod 3$ ist, gibt es ebenfalls keine Lösung.
- $r = 2$. In diesem Fall muss $p + q^2 = 16$ gelten, wofür sich als einzige Lösung $p = 7$ und $q = 3$ ergibt.

(Reinhard Razen) □

Lösung 7. Setzt man $q = p + s$ und $r^2 = p + t$ (wobei $s, t \in \mathbb{Z}$ und offensichtlich $s \neq t$ ist) so erhält man $p + (p + s)^2 = (p + t)^2$, also $p = -2ps - s^2 + 2pt + t^2 = (t - s)(t + s + 2p)$. Wir müssen daher vier Fälle untersuchen.

- Fall 1: $t - s = 1$ und $t + s + 2p = p$.
  Elimination von t liefert $s = \frac{-1-p}{2}$, daher muss p ungerade sein. Weiters folgt $t = \frac{1-p}{2}$. Daher ist $q = p + s = \frac{p-1}{2}$ und $r^2 = p + t = \frac{p+1}{2}$. Wäre $q = 2$, so wäre $p = 5$ und $r^2 = 3$, was nicht möglich ist. Also ist auch q ungerade, und daher r^4 und damit r gerade, also $r = 2$. Daraus folgt $p = 7$ und $q = 3$.
- Fall 2: $t - s = p$ und $t + s + 2p = 1$.
  Wegen $p > 1$ müsste $t - s = p > 1 = t + s + 2p$, also $p + s < 0$ sein, was wegen $p + s = q > 0$ nicht möglich ist.
- Fall 3: $t - s = -1$ und $t + s + 2p = -p$.
  Wegen $-p < -1$ müsste $t + s + 2p = -p < -1 = t - s$, also $p + s < 0$ sein, was wegen $p + s = q > 0$ nicht möglich ist.
- Fall 4: $t - s = -p$ und $t + s + 2p = -1$.
  Elimination von s liefert $t = \frac{-1-3p}{2}$. Dies führt aber auf den Widerspruch $r^2 = p + t = \frac{-1-p}{2} < 0$.

(Reinhard Razen) □