51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

6. Juni 2020

Aufgabe 1. *Sei a eine reelle Zahl und b eine reelle Zahl mit $b \neq -1$ und $b \neq 0$. Man bestimme alle Paare (a, b), für die*

$$\frac{(1+a)^2}{1+b} \leq 1 + \frac{a^2}{b}$$

erfüllt ist. Für welche Paare (a, b) gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

Lösung 1. Die Ungleichung lässt sich folgendermaßen schrittweise äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{a^2}{b} - \frac{(1+a)^2}{1+b} &\geq 0 \iff \\ \frac{b^2 + b + a^2 + a^2b - b - 2ab - a^2b}{b(1+b)} &\geq 0 \iff \\ \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b(1+b)} &\geq 0 \iff \\ \frac{(a-b)^2}{b(1+b)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Deshalb ergibt sich Gleichheit genau dann, wenn $a = b$, also für alle Paare (a, a) mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Es sei nun $a \neq b$. Dann gilt die Ungleichung genau dann, wenn $b(1+b) > 0$, d.h. genau für $b < -1$ oder $b > 0$, also für alle Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b < -1$ oder $b > 0$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir lösen die Aufgabe mit Fallunterscheidungen.

- Es sei $b > 0$.

  Dann gilt $b(1+b) > 0$ und die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu

  $$\begin{aligned} (1+a)^2 b \leq (1+b)b + a^2(1+b) &\iff \\ b + ab^2 \leq b + b^2 + a^2 + ab &\iff \\ 0 \leq (a-b)^2. \end{aligned}$$

  Die Ungleichung gilt also für alle Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$.

- Es sei $-1 < b < 0$.

  Dann gilt $b(1+b) < 0$ und die gegebene Ungleichung ist äquivalent zu

  $$\begin{aligned} (1+a)^2 b \geq (1+b)b + a^2(1+b) &\iff \\ 0 \geq (a-b)^2. \end{aligned}$$

  Die Ungleichung gilt in diesem Fall für alle Paare (a, a), mit $-1 < a < 0$.

- Es sei $b < -1$.

  Dann gilt $b(1+b) > 0$. Die gegebene Ungleichung ist analog zum ersten Fall äquivalent zu

  $$0 \leq (a-b)^2$$

  und alle Paare (a, b) mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b < -1$ sind Lösungen.

Zusammenfassend haben wir daher folgende Lösungen:

- Alle Paare (a, b) mit $a \neq b$, $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $b < -1$ oder $b > 0$.
- Alle Paare (a, a) mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Das sind auch alle möglichen Gleichheitsfälle.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 2. *Wie viele positive fünfstellige ganze Zahlen gibt es, für die das Produkt ihrer fünf Ziffern* 900 *ist?*

(Karl Czakler)

Antwort. 210

Lösung. Es gilt $900 = 30^2 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2$. Daher muss in einer gesuchten Zahl zweimal die Ziffer 5 stehen. Das Produkt der drei anderen Ziffern ist dann 36.

Es gibt daher folgende Möglichkeiten für die fünf Ziffern einer gesuchten Zahl:

(a) 5, 5, 9, 4, 1

(b) 5, 5, 9, 2, 2

(c) 5, 5, 6, 6, 1

(d) 5, 5, 6, 3, 2

(e) 5, 5, 4, 3, 3

Es gibt 10 Möglichkeiten für die Verteilung der beiden Ziffern 5 in einer fünfstelligen Zahl.

Sind die restlichen drei Ziffern verschieden, gibt es jeweils 6, sind zwei der restlichen drei Ziffern gleich, gibt es jeweils nur 3 verschiedene Anordnungen für diese drei Zifffern. Wir haben daher

$$10 \cdot 6 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 210$$

Zahlen mit dieser Eigenschaft.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 3. *Gegeben sei ein gleichschenkeliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Der Lotfußpunkt von D auf AB sei E. Der Halbierungspunkt der Diagonale BD sei M.*

Man beweise, dass EM parallel zu AC ist.

(Karl Czakler)

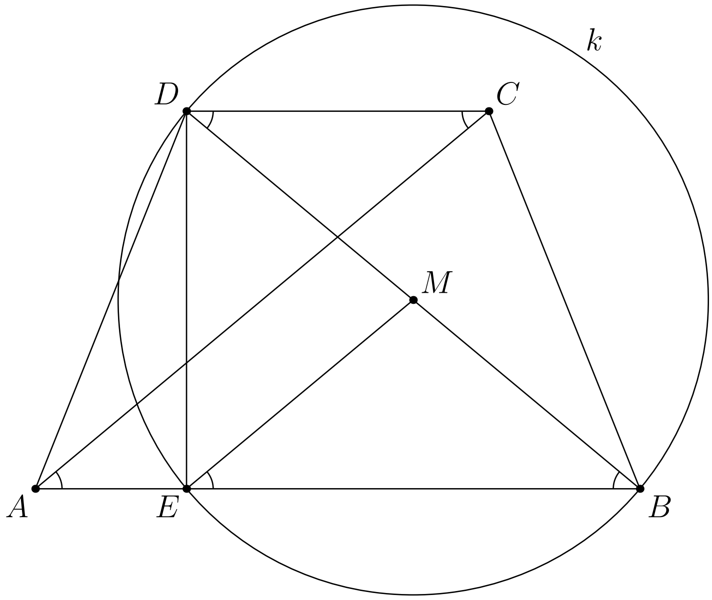

Abbildung 1: Aufgabe 3, Lösung 1

Lösung 1. Weil das Dreieck BDE rechtwinkelig ist, liegt E auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser BD mit Mittelpunkt M. Daraus folgt

$$MB = MD = ME.$$

Daher ist das Dreieck EBM gleichschenkelig. Wegen $AB \parallel CD$ erhalten wir damit

$$\angle BEM = \angle MBE = \angle BDC.$$

Weil das Trapez $ABCD$ gleichschenkelig ist, sind die Dreiecke BDC und ACD ungleichsinnig kongruent, also gilt mit $AB \parallel CD$

$$\angle BDC = \angle DCA = \angle BAC$$

und insgesamt

$$\angle BEM = \angle BAC.$$

Damit ist aber gezeigt, dass EM parallel zu AC ist.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Weil $ABCD$ ein gleichschenkeliges Trapez ist, sind seine Diagonalen AC und BD gleich lang. Wir legen durch D eine Parallele zu AC. Es sei B_1 der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Geraden AB. Wegen $B_1D \parallel AC, B_1A \parallel CD$ ist B_1ACD ein Parallelogramm, und es gilt

$$B_1D = AC = BD.$$

Das bedeutet, dass das Dreieck B_1BD gleichschenkelig ist. Der Lotfußpunkt E von D auf AB ist in diesem gleichschenkeligen Dreieck der Höhenfußpunkt auf der Basis B_1B. Damit halbiert E die Strecke BB_1. Weil M die Strecke BD halbiert, folgt nach dem Strahlensatz

$$EM \parallel B_1D.$$

Wegen $B_1D \parallel AC$ bedeutet das, dass EM parallel zu AC ist.

(Gottfried Perz) □

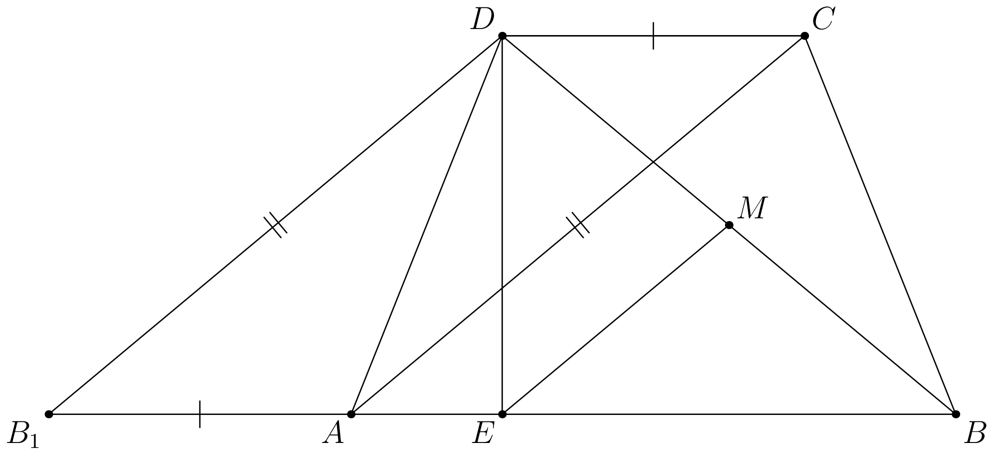

Abbildung 2: Aufgabe 3, Lösung 2

Aufgabe 4. *Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung*

$$7an - 3n! = 2020$$

eine positive ganzzahlige Lösung n hat.

(Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$.)

(Richard Henner)

Lösung. Antwort:

$a = 68$ oder $a = 289$.

Lösung:

Die linke Seite der Gleichung ist durch n teilbar, daher muss n ein Teiler von 2020 sein.
n muss kleiner sein als 7, denn für $n \geq 7$ ist die linke Seite durch 7 teilbar, 2020 aber nicht.
Also kommen für n nur 1, 2, 4 und 5 in Frage.
Für $n = 1$ erhält man die Geichung $7a = 2023$, also $a = 289$.
Für $n = 2$ erhält man die Gleichung $14a = 2026$, das hat aber keine Lösung, weil 2026 nicht durch 14 teilbar ist.
Für $n = 4$ erhält man die Gleichung $28a = 2092$, das hat aber keine Lösung, weil 2092 nicht durch 28 teilbar ist.
Für $n = 5$ erhält man die Geichung $35a = 2380$, also $a = 68$.
Für $a = 68$ hat also die Gleichung die Lösung $n = 5$ und für $a = 289$ die Lösung $n = 1$.

(Richard Henner) □