50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb – Lösungen

18. Juni 2019

Aufgabe 1. *Es seien x und y ganze Zahlen mit $x+y \neq 0$. Man bestimme alle Paare (x, y), für die*

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10$$

gilt.

(Walther Janous)

Antwort.

$$(x, y) \in \{(-2,4), (-2,6), (0,10), (4,-2), (4,12), (6,-2), (6,12), (10,0), (10,10), (12,4), (12,6)\}.$$

Lösung 1. Die Gleichung lautet in äquivalenter Form

$$\begin{aligned} & x^2+y^2 = 10x+10y \\ \iff \quad & x^2-10x+y^2-10y = 0 \\ \iff \quad & (x-5)^2+(y-5)^2 = 50 \end{aligned}$$

mit $x+y \neq 0$, d. h. wir haben $a^2+b^2 = 50$ für ganze Zahlen $a := x-5$ und $b := y-5$ zu untersuchen. Weil keine der zwei Zahlen betragsmäßig größer als 7 sein kann, erhält man durch Überprüfen der wenigen Fälle $(a, b) \in \{(\pm 1, \pm 7), (\pm 7, \pm 1), (\pm 5, \pm 5)\}$ als einzige Lösungen. Mit $(a, b) \in \{(\pm 1, \pm 7), (\pm 7, \pm 1)\}$ erhält man $x-5 = \pm 1$ und $y-5 = \pm 7$ (oder x und y vertauscht), was auf $x \in \{4, 6\}$ und $y \in \{-2, 12\}$ (bzw. auf $y \in \{4, 6\}$ und $x \in \{-2, 12\}$) führt. Das Paar $(a, b) = (5, 5)$ führt zu $x-5 = \pm 5$ und $y-5 = \pm 5$ samt $x \in \{0, 10\}$ und $y \in \{0, 10\}$. Das Paar $(x, y) = (0, 0)$ erfüllt als einziges davon die Bedingung $x+y \neq 0$ nicht. Damit ergeben sich die (elf) in der Antwort angeführten Lösungspaare.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Die Gleichung ist für $x+y \neq 0$ äquivalent zu

$$x^2-10x+y^2-10y = 0.$$

Dies kann man als eine quadratische Gleichung in x auffassen. Anwendung der kleinen Lösungsformel ergibt

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-y^2+10y}.$$

Gesucht ist eine ganze Zahl x, die diese Gleichung erfüllt. Dies ist äquivalent dazu, dass es eine (nicht-negative) ganze Zahl a gibt mit $x = 5 \pm a$ und

$$\begin{aligned} & \sqrt{25-y^2+10y} = a \\ \iff \quad & y^2-10y+a^2-25 = 0. \end{aligned}$$

Wir lösen diese quadratische Gleichung in y und erhalten

$$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-(a^2-25)}.$$

Analog zu oben ist y genau dann ganzzahlig, wenn es eine (nicht-negative) ganze Zahl b gibt mit $y = 5 \pm b$ und

$$\begin{aligned} & \sqrt{25-(a^2-25)} = b \\ \iff \quad & a^2 + b^2 = 50. \end{aligned}$$

Wie bei Lösung 1 erfüllen nur die Zahlenpaare $(a, b) \in \{(1, 7), (5, 5), (7, 1)\}$ diese Gleichung. Das Zusammensetzen dieser Paare mit den Lösungen der quadratischen Gleichungen ergibt zwölf potenzielle Lösungpaare. Da unter diesen Paaren nur das Paar $(x, y) = (0, 0)$ die Bedingung $x + y \neq 0$ nicht erfüllt, erhält man die elf in der Antwort angeführten Lösungspaare.

(Lukas Andritsch) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Über der Strecke BC wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck BCS errichtet. Der Halbierungspunkt der Strecke AS sei N und der Halbierungspunkt der Seite CD sei H.*

Man beweise: $\sphericalangle NHC = 60°$.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Es sei P der Mittelpunkt der Strecke BS, siehe Abbildung 1. Mit dem Strahlensatz folgt, dass die Strecke NP parallel zu AB und halb so lang wie AB ist. Daher ist $NPCH$ ein Parallelogramm. Da der Winkel $\sphericalangle NPC$ ein Normalwinkel zu $\sphericalangle CBS = 60°$ ist, folgt $60° = \sphericalangle NPC = \sphericalangle NHC$.

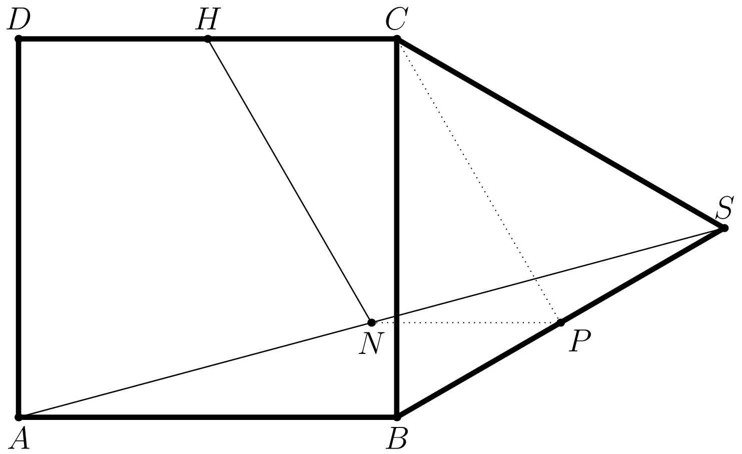

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Es sei E der Halbierungspunkt der Strecke AB und M der Mittelpunkt der Strecke EH, siehe Abbildung 2. Mit dem Strahlensatz folgt, dass EN parallel zu BS und halb so lang wie $BS = AB$ ist. Die Strecke EH ist parallel zu CB, daher ist $\sphericalangle MEN$ ein Parallelwinkel zu $\sphericalangle CBS$. Daher gilt $\sphericalangle MEN = 60°$ und da $EM = EN$ ist, ist MEN ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelwinkel $60°$ und somit sogar ein gleichseitiges Dreieck. Damit gilt $MN = ME = MH$. Damit liegt N am Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser EH. Nach dem Satz von Thales ist das Dreieck ENH rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Eckpunkt N. Aus $\sphericalangle HEN = 60°$ folgt dann $\sphericalangle EHN = 30°$ und mit $\sphericalangle EHC = 90°$ unmittelbar $\sphericalangle NHC = 60°$.

(Richard Henner) □

Lösung 2a. Wären zentrische Streckungen im Stoff eines Junior-Regionalwettbewerbs, so könnte man in Lösung 2 argumentieren, dass das Dreieck MEN das Bild des gleichseitigen Dreiecks CBS unter der zentrischen Streckung mit Zentrum A und Faktor $1/2$ ist. Daher muss MEN ebenfalls gleichseitig sein.

(Clemens Heuberger) □

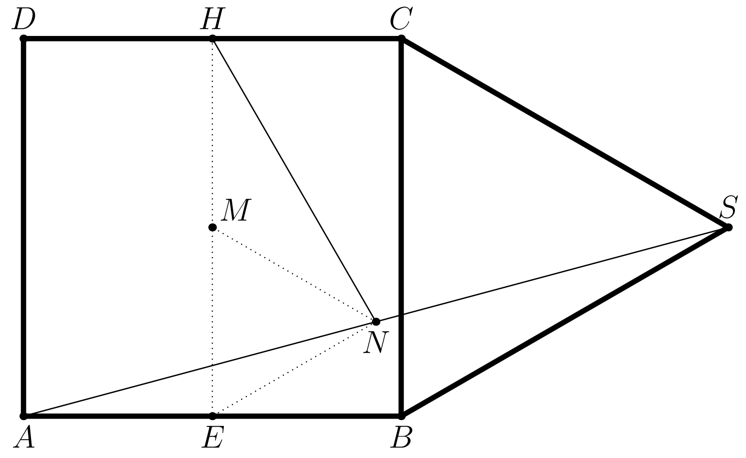

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 2

Lösung 3. Wir bezeichnen mit F und G die Halbierungspunkte der Seiten AD und BC, mit g die Parallele zur Geraden AB durch N und mit k den Inkreis des Quadrats, siehe Abbildung 3. Das Dreieck ABS ist gleichschenkelig. Da N der Halbierungspunkt der Basis AS dieses Dreiecks ist, gilt $\sphericalangle ANB = 90°$, und aus $\sphericalangle ABS = 150°$ folgt $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NSB = 15°$. Der Punkt S liegt auf der Geraden FG. Da N der Halbierungspunkt von AS ist, ist die Gerade g die Streckensymmetrale der Strecken AF und BG. Das Dreieck FNG liegt daher symmetrisch zum Dreieck ANB bezüglich der Geraden g. Daher gilt $15° = \sphericalangle BAN = \sphericalangle NFG$, und wegen $90° = \sphericalangle ANB = \sphericalangle FNG$ liegt der Punkt N nach dem Satz von Thales auf k. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt dann $15° = \sphericalangle NFG = \sphericalangle NHG$ und daraus ergibt sich $\sphericalangle NHC = \sphericalangle NHG + \sphericalangle GHC = 15° + 45° = 60°$.

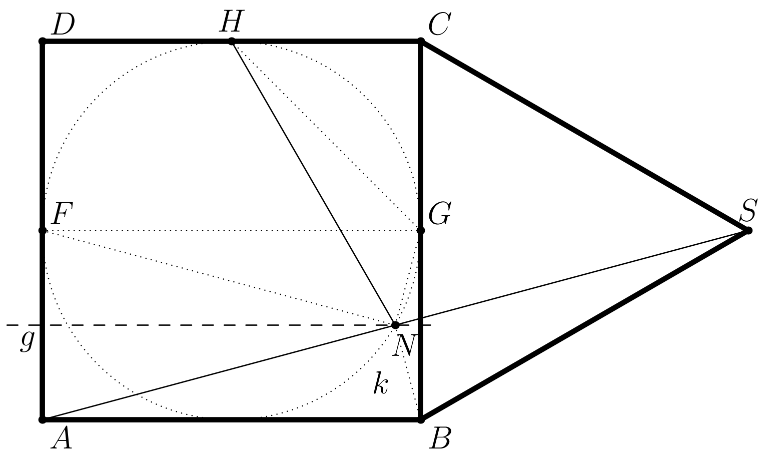

Abbildung 3: Aufgabe 2, Lösung 3

(Karl Czakler) □

Lösung 4. Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Geraden AH und BC mit T und den Halbierungspunkt von AB mit E, siehe Abbildung 4.

Da AB parallel zu HC und doppelt so lang ist, gilt nach dem Strahlensatz (mit Zentrum T), dass $TC = CB$. Somit ist H der Halbierungspunkt von AT und nach Angabe ist N der Halbierungspunkt von AS, daher sind nach dem Strahlensatz mit Zentrum A die Strecken HN und TS parallel. Da TCS ein gleichschenkliges Dreieck mit Scheitelwinkel $120°$ ist, gilt $\sphericalangle CTS = 30°$. Da TS parallel zu NH und CT parallel zu EH ist, folgt $\sphericalangle EHN = \sphericalangle CTS = 30°$. Daraus folgt wie gewünscht $\sphericalangle NHC = 90° - \sphericalangle EHN = 60°$.

(Clemens Heuberger) □

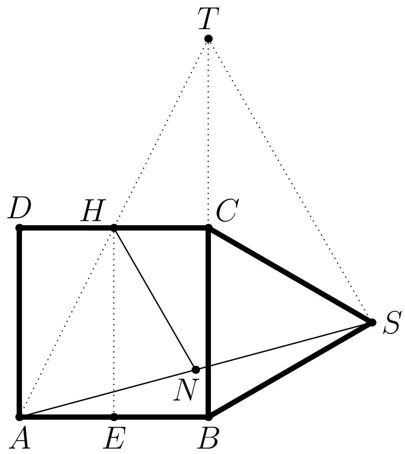

Abbildung 4: Aufgabe 2, Lösung 4

Aufgabe 3. *Alice und Bob spielen ein Jahreszahlspiel. Es werden zwei Spielzahlen* 19 *und* 20 *und eine Startzahl aus der Menge* $\{9, 10\}$ *verwendet. Unabhängig voneinander wählt Alice ihre Spielzahl und Bob wählt die Startzahl. Die andere Spielzahl erhält Bob.*

Dann addiert Alice ihre Spielzahl zur Startzahl, zum Ergebnis addiert Bob seine Spielzahl, zum Ergebnis addiert Alice ihre Spielzahl, u.s.w. Das Spiel geht so lange, bis die Zahl 2019 *erreicht oder überschritten ist.*

Wer die Zahl 2019 *erreicht, gewinnt. Wird* 2019 *überschritten, endet das Spiel unentschieden.*

- *Man zeige, dass Bob nicht gewinnen kann.*
- *Welche Startzahl muss Bob wählen, um zu verhindern, dass Alice gewinnt?*

(Richard Henner)

Lösung 1. Sei s die Startzahl und a die Spielzahl von Alice und b die Spielzahl von Bob. Wir nennen eine Addition von a durch Alice gefolgt von einer Addition von b durch Bob eine Spielrunde. Sei n die Anzahl der Spielrunden. Damit Bob gewinnt, müsste die Gleichung $s + 39n = 2019$ eine ganzzahlige Lösung haben. Für $s = 9$ oder 10 müsste also $39n = 2010$ oder $39n = 2009$ gelten. Weder 2010 noch 2009 ist durch 39 teilbar, da $51 \cdot 39 = 1989$ und $52 \cdot 39 = 2028$. Also kann Bob nicht gewinnen.

Damit Alice gewinnt, muss $s + 39n + a = 2019$ gelten. Wegen $28 \leq a + s \leq 30$ kann das natürlich nur für $n = 51$ gelten, also $s + a = 30$. Das kann nur für $s = 10$ und $a = 20$ gelten.

Bob muss also die Startzahl 9 wählen, um zu verhindern, dass Alice gewinnt.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Sei s die Startzahl und a die Spielzahl von Alice und b die Spielzahl von Bob. Eine Runde besteht aus der Addition der Zahl a durch Alice gefolgt von der Addition der Zahl b durch Bob.

Da es für s und für a je zwei Möglichkeiten gibt, gibt es vier Möglichkeiten für den Spielverlauf.

- Bei $s = 9$ und $a = 19$ erreicht Alice in der 52. Runde die Zahl 2017 und Bob überschreitet 2019. Das Spiel endet unentschieden.
- Bei $s = 9$ und $a = 20$ erreicht Alice in der 52. Runde die Zahl 2018 und Bob überschreitet 2019. Das Spiel endet unentschieden.
- Bei $s = 10$ und $a = 19$ erreicht Alice in der 52. Runde die Zahl 2018 und Bob überschreitet 2019. Das Spiel endet unentschieden.
- Bei $s = 10$ und $a = 20$ erreicht Alice in der 52. Runde die Zahl 2019 und gewinnt.

Bob kann also nie gewinnen. Wenn Bob die Startzahl 9 wählt, kann auch Alice nicht gewinnen.

(Richard Henner) □

Aufgabe 4. *Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die*

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 *teilbar ist.*

(Walther Janous)

Lösung 1. Die vier in Rede stehenden Primzahlen müssen sich wegen $p > 5$ und $s < p + 10$ unter den fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, $p + 2$, $p + 4$, $p + 6$ und $p + 8$ befinden.

Unter drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Daher muss sowohl unter den drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, $p + 2$, $p + 4$ als auch unter den drei Zahlen $p+4$, $p+6$, $p+8$ jeweils eine Zahl sein, die durch 3 teilbar ist. Vier der fünf Zahlen sind aber Primzahlen, daher muss $p + 4$ die durch 3 teilbare Zahl in beiden Dreiergruppen sein. Die übrigen vier Zahlen p, $p + 2 = q$, $p + 6 = r$ und $p + 8 = s$ sind somit prim.

Weil unter fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer eine durch 5 teilbar ist, muss $p + 4$ auch durch 5, insgesamt also durch 15 teilbar sein.

Damit ergibt sich aber wegen

$$p + q + r + s = p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8) = 4p + 16 = 4(p + 4),$$

dass jede der in Rede stehenden Summen durch 60 teilbar ist.

Bemerkung. Mit dem Quadrupel $(11, 13, 17, 19)$ ergibt sich, dass die Zahl 60 durch keine größere ersetzt werden kann.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wegen $p > 5$ sind die Primzahlen p, q, r, s relativ prim zu 2, 3 und 5, sind also modulo 30 kongruent 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 oder 29.

Gilt $p \equiv 1 \pmod{30}$, also $p = 30k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so folgt für die drittnächste Primzahl $s \geq 30k + 13 = p + 12$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Gilt $p \equiv 7 \pmod{30}$, also $p = 30k + 7$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so folgt im Widerspruch zur Voraussetzung $s \geq 30k + 17 = p + 10$.

Ebenso folgt aus $p \equiv 13 \pmod{30}$, dass $s \geq p + 10$.

Gilt $p \equiv 17 \pmod{30}$, $p \equiv 19 \pmod{30}$ oder $p \equiv 29 \pmod{30}$, dann ist die drittnächste als Primzahl in Frage kommende Zahl kongruent $29, 1$ beziehungsweise 11 modulo 30, also mindestens um 12 größer als p.

Gilt $p \equiv 23 \pmod{30}$, dann ist die drittnächste als Primzahl in Frage kommende Zahl kongruent 7 modulo 30 und damit mindestens um 14 größer als p.

Lediglich im Fall $p \equiv 11 \pmod{30}$, also $p = 30k + 11$ für ein $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, können $q = 30k + 13$, $r = 30k + 17$ und $s = 30k + 19$ Primzahlen mit der geforderten Eigenschaft $s < p + 10$ sein. Dann folgt

$$p + q + r + s = 4 \cdot 30k + (11 + 13 + 17 + 19) = 120k + 60 = 60(2k + 1).$$

(Gottfried Perz) □

Lösung 3. Wegen $p > 5$ sind alle vier Primzahlen ungerade, ihre Summe ist daher gerade.

Darüber hinaus kann auch keine der vier Primzahlen die Einerziffer 5 haben, weil jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 5$ und Einerziffer 5 zusammengesetzt ist. Daher sind die vier betrachteten Primzahlen wegen $s < p + 10$ jene vier von fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, die nicht die Einerziffer 5 haben. Jede der Ziffern 1, 3, 7, 9 kommt also genau einmal als Einerziffer in p, q, r, s vor. Folglich ist die Einerziffer von $p + q + r + s$ gleich 0, und es gilt

$$p + q + r + s \equiv 0 \pmod{10}.$$

Hat p die Einerziffer 3 und damit q die Einerziffer 7, dann haben r und s die Einerziffern 9 und 1. Die Zahlen q, r, s sind also drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, von denen jedenfalls eine durch 3 teilbar und folglich keine Primzahl ist.

Analog ist eine der drei Zahlen p, q, r durch 3 teilbar, wenn 7 die Einerziffer von p ist.

Auch wenn p die Einerziffer 9 hat und damit q, r die Einerziffern 1 bzw. 3 haben, ist eine der drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen p, q, r durch 3 teilbar und daher keine Primzahl.

Nur dann, wenn p, q, r, s der Reihe nach die Einerziffern 1, 3, 7, 9 (und damit dieselbe Zehnerziffer) haben und die auf die Ziffer 5 endende Zahl

$$m = p + 4 = q + 2 = r - 2 = s - 4$$

neben 5 auch durch 3 teilbar ist, können p, q, r, s Primzahlen mit der geforderten Eigenschaft sein. Dann gilt

$$\frac{p + q + r + s}{4} = m \equiv 0 \pmod{15},$$

die Summe $p + q + r + s = 4m$ ist also durch 60 teilbar.

(Gottfried Perz) □

Lösung 4. Alle Zahlen größer als 5 betrachten wir modulo 60 und überlegen, welche davon keinesfalls Primzahlen sein können, siehe Tabelle 1.

Wir stellen fest, dass es modulo 60 nur zwei Möglichkeiten gibt, wo unter zehn aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens 4 Primzahlen auftreten könnten. Für diese gilt $11 + 13 + 17 + 19 = 60 \equiv 0 \pmod{60}$ bzw. $41 + 43 + 47 + 49 = 180 \equiv 0 \pmod{60}$, womit alles bewiesen ist.

Bemerkung. Wir wissen damit noch nicht, ob überhaupt Primzahlen existieren, die die geforderten Bedingungen erfüllen. Falls sie existieren, wissen wir aber, welche Werte sie modulo 60 haben müssen, nämlich entweder $\{11, 13, 17, 19\}$ oder $\{41, 43, 47, 49\}$.

(Theresia Eisenkölbl, Gottfried Perz, Birgit Vera Schmidt) □

Bemerkung. Etwa unter `https://de.m.wikipedia.org/wiki/Primzahltupel#Primzahlvierling`, aber auch `http://mathworld.wolfram.com/PrimeQuadruplet.html` oder `http://oeis.org/A007530` findet sich Interessantes und Weiterführendes aus dem Umfeld der Aufgabe.

(Clemens Heuberger, Moritz Hiebler)

1	könnte Primzahl sein	**31**	könnte Primzahl sein
2	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	32	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
3	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar	33	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar
4	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	34	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
5	sicher nicht prim, da durch 5 teilbar	35	sicher nicht prim, da durch 5 teilbar
6	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar	36	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar
7	könnte Primzahl sein	**37**	könnte Primzahl sein
8	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	38	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
9	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar	39	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar
10	sicher nicht prim, da durch 2, 5 teilbar	40	sicher nicht prim, da durch 2, 5 teilbar
11	könnte Primzahl sein	**41**	könnte Primzahl sein
12	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar	42	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar
13	könnte Primzahl sein	**43**	könnte Primzahl sein
14	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	44	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
15	sicher nicht prim, da durch 3, 5 teilbar	45	sicher nicht prim, da durch 3, 5 teilbar
16	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	46	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
17	könnte Primzahl sein	**47**	könnte Primzahl sein
18	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar	48	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar
19	könnte Primzahl sein	**49**	könnte Primzahl sein
20	sicher nicht prim, da durch 2, 5 teilbar	50	sicher nicht prim, da durch 2, 5 teilbar
21	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar	51	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar
22	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	52	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
23	könnte Primzahl sein	**53**	könnte Primzahl sein
24	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar	54	sicher nicht prim, da durch 2, 3 teilbar
25	sicher nicht prim, da durch 5 teilbar	55	sicher nicht prim, da durch 5 teilbar
26	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	56	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
27	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar	57	sicher nicht prim, da durch 3 teilbar
28	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar	58	sicher nicht prim, da durch 2 teilbar
29	könnte Primzahl sein	**59**	könnte Primzahl sein
30	sicher nicht prim, da durch 2, 3, 5 teilbar	60	sicher nicht prim, da durch 2, 3, 5 teilbar

Tabelle 1: Mögliche Primzahlen modulo 60