48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger – Lösungen

13. Juni 2017

Aufgabe 1. *Gegeben sind die nichtnegativen reellen Zahlen a und b mit $a + b = 1$. Man beweise:*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \leq 1$$

Wann gilt Gleichheit in der linken Ungleichung, wann in der rechten?

(Walther Janous)

Lösung 1. (Gerhard Kirchner) Durch Umformen der Angabe erhalten wir

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a + b)\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + b^2} = 1 - \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

Daraus sieht man sofort die rechte Ungleichung mit Gleichheit für $ab = 0$, also $a = 0$, $b = 1$ und für $a = 1$, $b = 0$. Die linke Ungleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \iff \frac{ab}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff 0 \leq (a - b)^2.$$

Diese Ungleichung ist klarerweise richtig mit Gleichheit für $a = \frac{1}{2}$. Dann gilt auch $b = \frac{1}{2}$. $\square$

Lösung 2. (Gerhard Kirchner) Durch Einsetzen von $b = 1 - a$ erhalten wir

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = \frac{a^3 + (1 - a)^3}{a^2 + (1 - a)^2} = \frac{1 - 3a + 3a^2}{1 - 2a + 2a^2}.$$

Wegen $a^2 + b^2 = 1 - 2a + 2a^2 > 0$ ist die linke Ungleichung äquivalent zu

$$\frac{1}{2} - a + a^2 \leq 1 - 3a + 3a^2 \iff 0 \leq \frac{1}{2} - 2a + 2a^2 \iff 0 \leq (1 - 2a)^2.$$

Diese Ungleichung ist klarerweise richtig mit Gleichheit für $a = \frac{1}{2}$. Dann gilt auch $b = \frac{1}{2}$.
Ebenso ist die rechte Ungleichung äquivalent zu

$$1 - 3a + 3a^2 \leq 1 - 2a + 2a^2 \iff 0 \leq a(1 - a) = ab.$$

Diese Ungleichung ist richtig für $0 \leq a, b$. Gleichheit gilt für $a = 0$, $b = 1$ und für $a = 1$, $b = 0$. $\square$

Aufgabe 2. *Im gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist D der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Strecke CD. Die Gerade BM schneidet AC in E. Man beweise, dass AC dreimal so lang wie CE ist.*

(Erich Windischbacher)

Lösung 1. (Richard Henner) Wir zeichnen eine Parallele zu BE durch den Punkt D und schneiden sie mit AC. Den Schnittpunkt nennen wir G. Weil M der Mittelpunkt der Strecke DC ist, ist E der Mittelpunkt von GC. (Strahlensatz)
Weil das Dreieck ABC gleichschenkelig ist und AB die Basis, ist D der Mittelpunkt von AB. Daher ist G der Mittelpunkt von AE. (Strahlensatz)
Die Strecken AG, GE und EC snd also gleich lang. Daher ist AC dreimal so lang wie EC. $\square$

Lösung 2. (Gottfried Perz) Weil ABC gleichschenklig ist, ist der auf der Basis AB liegende Höhenfußpunkt D zugleich der Halbierungspunkt der Strecke AB.
Es sei nun P jener Punkt, der symmetrisch zu M bezüglich D liegt. Dann ist das Viereck $APBM$ ein Parallelogramm, weil D sowohl die Diagonale AB als auch die Diagonale PM des Vierecks halbiert. Darüber hinaus gilt $\overline{PD} = \overline{DM} = \overline{MC}$.
Nach Strahlensatz folgt daraus

$$\overline{AC} : \overline{EC} = \overline{PC} : \overline{MC} = 3 : 1,$$

also $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CE}$. □

Lösung 3. (Gottfried Perz) Es sei C' jener Punkt der Geraden BC, der symmetrisch zu B bezüglich C liegt. Weiters sei M' der Schnittpunkt der Geraden durch B, M und E mit AC'.
Weil einerseits D als Höhenfußpunkt auf der Basis AB die Strecke AB und andererseits C die Strecke BC' halbiert, ist nach Strahlensatz AC' parallel zu CD. Daraus folgt

$$\overline{AM'} : \overline{M'C'} = \overline{DM} : \overline{MC} = 1 : 1.$$

Somit sind AC und BM' Schwerlinien im Dreieck ABC', und E ist Schwerpunkt von ABC'. Daher gilt $\overline{AE} : \overline{EC} = 2 : 1, \overline{AC} : \overline{EC} = 3 : 1$ also $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CE}$. □

Lösung 4. (Gottfried Perz) Es sei $c = \overline{AB}$ die Länge der Basis AB und $h = \overline{CD}$ die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Weil ABC gleichschenklig ist, halbiert D die Strecke AB, es gilt also $\overline{AD} = \overline{BD} = \frac{c}{2}$.
Weiters sei F der Lotfußpunkt aus E auf AB, und es gelte $\overline{DF} = x, \overline{EF} = y$. Weil EF parallel zu CD ist, gilt nach Strahlensatz einerseits $\overline{EF} : \overline{MD} = \overline{BF} : \overline{BD}$, also

$$y : \frac{h}{2} = \left(\frac{c}{2} + x\right) : \frac{c}{2}$$

und andererseits $\overline{EF} : \overline{CD} = \overline{AF} : \overline{AD}$, also

$$y : h = \left(\frac{c}{2} - x\right) : \frac{c}{2}.$$

Insgesamt ergibt das

$$\left(\frac{c}{2} - x\right) : \frac{c}{2} = \left(\frac{c}{2} + x\right) : c = y : h.$$

Daraus folgt $\left(\frac{c}{2} - x\right) : 2 = \left(\frac{c}{2} + x\right)$ und in weiterer Folge

$$x = \frac{c}{6}.$$

Damit erhalten wir

$$\overline{AC} : \overline{EC} = \overline{AD} : \overline{DF} = \frac{c}{2} : x = \frac{c}{2} : \frac{c}{6} = 3 : 1,$$

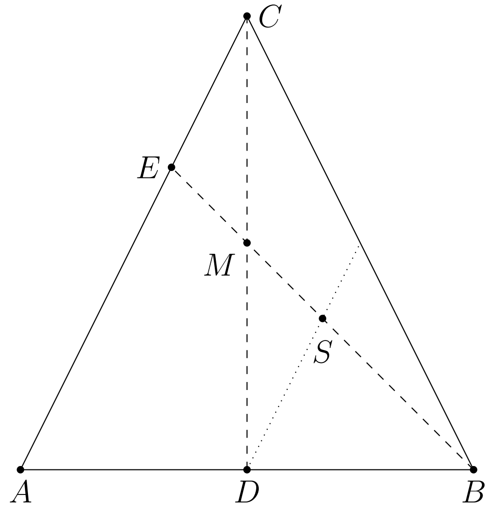
also $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CE}$. □

Lösung 5. (Gottfried Perz) Wir ergänzen das Dreieck DBC durch einen Punkt F zum Parallelogramm $DBCF$ mit Diagonale CD. Dann ist M als Mittelpunkt von CD auch Mittelpunkt der zweiten Diagonale BF . Daher liegt E als Schnittpunkt der Geraden AC und BM auch auf MF.
Weil die Parallelogrammseite CF parallel zu AB ist und im gleichschenkligen Dreieck ABC der Höhenfußpunkt D die Basis AB halbiert, gilt außerdem $\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{FC}$. Das bedeutet, dass auch $ADCF$ ein Parallelogramm ist; sein Diagonalenschnittpunkt H halbiert AC.
Somit sind FM und CH Schwerlinien im Dreieck CFD; E ist Schwerpunkt des Dreiecks CFD. Daher gilt $\overline{CE} : \overline{EH} = 2 : 1$, $\overline{CE} : \overline{CH} = \overline{CE} : (\overline{CE} + \overline{EH}) = 2 : 3$, wegen $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{CH}$ also

$$\overline{CE} : \overline{AC} = 2 : 6 = 1 : 3$$

und damit $\overline{AC} = 3 \cdot \overline{CE}$. □

Lösung 6. (Gerhard Kirchner) Wir betrachten den Schwerpunkt S des Dreiecks DBC, der auf der Schwerlinie BM liegt. Die Schwerlinie DS halbiert die Seite BC, daher ist laut Strahlensatz DS parallel zu AC. Da der Schwerpunkt die Schwerlinie im Verhältnis $2 : 1$ teilt, gilt auf der Parallelen AC das selbe Teilverhältnis, das heißt E teilt AC im Verhältnis $2 : 1$. □



Aufgabe 3. *Anton schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 2 teilbar sind. Berta schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 3 teilbar sind. Clara schreibt der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen auf, die durch 4 teilbar sind. Die ordnungsliebende Dora notiert die von den anderen aufgeschriebenen Zahlen. Dabei ordnet sie die Zahlen der Größe nach und schreibt keine Zahl mehrfach an. Wie lautet die 2017. Zahl in ihrer Liste?*

(Richard Henner)

Lösung 1. (Richard Henner) Claras Zahlen kann Dora weglassen, weil sie alle schon von Anton angeschrieben wurden. Von den Zahlen bis 3000 hat Anton 1500 und Berta 1000 geschrieben, 500 davon haben beide geschrieben und werden daher von Dora weggelassen. Dora schreibt also genau 2000 Zahlen bis 3000 an. Die nächsten 17 Zahlen sind $3002, 3003, 3004, 3006, 3008, 3009, 3010, 3012, 3014, 3015, 3016, 3018, 3020, 3021, 3022, 3024, 3026$. 3026 ist also die letzte Zahl, die Dora anschreibt. □

Lösung 2. (Gerhard Kirchner) Wir betrachten die Restklassen mod 12. Anton schreibt alle Elemente der Restklassen 0, 2, 4, 6, 8, 10 auf. Berta schreibt alle Elemente der Restklassen 0, 3, 6, 9 auf. Christine schreibt alle Elemente der Restklassen 0, 4, 8 auf. Dora schreibt also die Elemente der Restklassen 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 auf. Von je 12 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen schreibt sie also immer genau 8 auf. Wegen $2017 = 8 \cdot 252 + 1$ ist die 2017. Zahl genau $12 \cdot 252 + 2 = 3026$. □

Aufgabe 4. *Wie viele Lösungen hat die Gleichung*

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{17} \right\rfloor$$

über der Menge der positiven ganzen Zahlen?
Dabei bezeichnet $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

(Karl Czakler)

Lösung 1. (Karl Czakler) Es sei

$$\left\lfloor \frac{x}{20} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{17} \right\rfloor = n.$$

Dann gilt $20n \le x < 20n + 20$ und $17n \le x < 17n + 17$. Daher muss für alle möglichen Lösungen x gelten

$$20n \le x < 17n + 17. \tag{1}$$

Für den Wert n folgt $20n < 17n + 17$ also $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Für $n = 0$ ergeben sich mit $1 \le x < 17$ insgesamt 16 Lösungen, für $n = 1$ ergeben sich mit $20 \le x < 34$ insgesamt 14 Lösungen, für $n = 2$ ergeben sich mit $40 \le x < 51$ insgesamt 11 Lösungen, usw. (Die Ungleichung (1) hat $17n + 17 - 20n = 17 - 3n$ Lösungen, nur für $n = 0$ ist die Lösung $x = 0$ auszuschließen.)
Wir haben daher $16 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 = 56$ Lösungen über der Menge der natürlichen Zahlen für diese Gleichung. □

Lösung 2. (Gerhard Kirchner) Die Division mit Rest von x durch 17 bzw. 20 ergibt

$$x = 20a + b = 17c + d, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{N}, \quad 0 \le b \le 19, \quad 0 \le d \le 16.$$

Die gegebene Gleichung lautet dann $a = c$ und wir erhalten $3a = d - b$. Wir müssen also herausfinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, $b \in \{0, 1, \ldots, 19\}$ und $d \in \{0, 1, \ldots, 16\}$ zu wählen, sodass $d \ge b$ und $3 \mid d - b$. Weiters ist zu beachten, dass $x > 0$, das heißt $b = d = 0$ ist nicht erlaubt.
Dazu notieren wir für jedes mögliche d die Anzahl der möglichen b in der selben Restklasse mod 3:

d	0	1, 2	3, 4, 5	6, 7, 8	9, 10, 11	12, 13, 14	15, 16
Anzahl der möglichen b	–	je 1	je 2	je 3	je 4	je 5	je 6

Daher gibt es $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 56$ mögliche Paare (b, d) und jeweils ein $a = c$ und ein x.
Bemerkung: Die Lösungsmenge ist $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 80, 81, 82, 83, 84, 100, 101\}$. □