45. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2014

Aufgabe 1. *Man bestimme alle Lösungen der Gleichung*

$$a^2 = b \cdot (b + 7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

W. Janous, WRG Ursulinen, Innsbruck

Lösung 1. Wegen $a^2 = b^2 + 7b$ und $b \geq 0$ gilt $a^2 \geq b^2$ und wegen $a \geq 0$ folgt $a \geq b$.

Es gibt also eine natürliche Zahl k mit $a = b + k$. Eingesetzt in die gegebene Gleichung ergibt das

$$(b + k)^2 - b(b + 7) = 0$$

und damit

$$b = \frac{k^2}{7 - 2k}.$$

Da b nicht negativ sein darf, muss $k = 0$, 1, 2 oder 3 sein. Nur für $k = 0$ oder 3 ist b eine ganze Zahl, nämlich 0 bzw. 9. Für $b = 0$ erhält man $a = 0$ und für $b = 9$ erhält man $a = 12$. Damit erhält man die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$.

(R. Henner) □

Lösung 2. Aus $a^2 = b \cdot (b+7)$ und der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung erhält man

$$a \leq \frac{2b + 7}{2} = b + \frac{7}{2}.$$

Andererseits gilt $a^2 = b \cdot (b + 7) \geq b^2$ und damit $a \geq b$.

Also gilt $a = b$ oder $a = b + 1$ oder $a = b + 2$ oder $a = b + 3$. Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert die Lösungen $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$.

(R. Henner) □

Lösung 3. Löst man $b^2 + 7b - a^2 = 0$ nach b auf, erhält man

$$b = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{49 + 4a^2}}{2}$$

Daher muss $49 + 4a^2$ eine Quadratzahl sein. Sei $49 + 4a^2 = x^2$ für ein $x > 0$, dann gilt

$$49 = x^2 - 4a^2 = (x + 2a) \cdot (x - 2a).$$

Da $x > 0$ und $a \geq 0$, ist auch $x + 2a > 0$ und damit auch $x - 2a = 49/(x + 2a) > 0$. Man kann 49 auf zwei Arten in positive Faktoren zerlegen ($7 \cdot 7$ oder $49 \cdot 1$). Außerdem gilt wegen $a \geq 0$, dass $x + 2a \geq x - 2a$. Im ersten Fall erhält man $a = 0$, im zweiten $a = 12$. Insgesamt erhält man die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$.

(R. Henner) □

Lösung 4. Wir multiplizieren die gegebene Gleichung mit 4 und erhalten

$$(2a)^2 = 4b^2 + 28b = (2b + 7)^2 - 49.$$

Da damit $2a < 2b + 7$ gilt, folgt $2a \leq 2b + 6$ und daher

$$(2b + 7)^2 - 49 = (2a)^2 \leq (2b + 6)^2 \iff 4b^2 + 28b \leq 4b^2 + 24b + 36 \iff b \leq 9.$$

Es sind damit nur $0 \leq b \leq 9$ zu untersuchen. Nur für $b \in \{0, 9\}$ ist $b(b+7)$ eine Quadratzahl. Es ergeben sich die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$.

(C. Heuberger) □

Lösung 5. Nach dem Euklidschen Algorithmus gilt $\operatorname{ggT}(b, b + 7) = \operatorname{ggT}(b, 7) \in \{1, 7\}$. Wir unterscheiden diese beiden Fälle.

1. Es gelte $\operatorname{ggT}(b, b + 7) = 1$. Dann folgt

   $$\begin{aligned} b &= x^2, \\ b + 7 &= y^2 \end{aligned}$$

   für passende ganze Zahlen x und y mit $0 \leq x < y$. Es folgt

   $$7 = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

   Da beide Faktoren der rechten Seite positiv sind und 7 eine Primzahl ist, folgt $y - x = 1$ und $y + x = 7$ und somit $y = 4$, $x = 3$, $b = 9$, $b + 7 = 16$ und $a = xy = 12$.

2. Es gelte $\operatorname{ggT}(b, b + 7) = 7$. Dann folgt

   $$\begin{aligned} b &= 7x^2, \\ b + 7 &= 7y^2 \end{aligned}$$

   für passende ganze Zahlen x und y mit $0 \leq x < y$. Es folgt

   $$7 = 7y^2 - 7x^2 = 7(y - x)(y + x) \iff 1 = (y - x)(y + x).$$

   Die einzige mögliche Faktorisierung ist $y - x = y + x = 1$, also $x = 0$ und $y = 1$, woraus sich $b = 0$ und $a = 0$ ergeben.

Die einzigen beiden Lösungen (a, b) sind somit $(0, 0)$ und $(12, 9)$.

(C. Heuberger) □

Lösung 6. Für $a = b$ ergibt sich sofort $a = b = 0$. Es sei deshalb im Folgenden $a \neq b$. (Es muss sogar $a > b$ sein.) Wir schreiben die Gleichung in der Form $a^2 - b^2 = 7b$, d.h. $(a-b)(a+b) = 7b$. Weil 7 eine Primzahl ist, ergeben sich zwei Teilbarkeitsfälle.

1. 7 teilt $a - b$, also $a - b = 7c$ mit $c \geq 1$ und c ganz, also $b = a - 7c$. Damit folgt $7c(2a - 7c) = 7(a - 7c)$, d.h.

$$a(2c-1) = 7c(c-1) \tag{1}$$

   Für $c = 1$ erhält man $a = 0$ samt $b = -7 < 0$. Es sei deshalb $c \geq 2$, womit insbesondere $2c - 1 \geq 3$ ist. Nun sind aber nach dem Euklidischen Algorithmus $\mathrm{ggT}(2c-1, c) = \mathrm{ggT}(c, 1) = 1$ und $\mathrm{ggT}(2c-1, c-1) = \mathrm{ggT}(c-1, 1) = 1$. Folglich ergibt sich aus (1), dass $2c - 1 = 7$, also $c = 4$ ist. Damit ist $a = 4 \cdot 3 = 12$, aber $b = 12 - 7 \cdot 4 < 0$.

2. 7 teilt $a + b$, also $a + b = 7d$ mit $d \geq 1$ und d ganz, also $b = 7d - a$. Somit: $(2a - 7d) \cdot 7d = 7(7d - a)$, also $a(2d+1) = 7d(d+1)$. Wie im ersten Fall ergibt sich $2d + 1 = 7$, d.h. $d = 3$. Damit ist $a = 3 \cdot 4 = 12$ samt $b = 21 - 12 = 9$.

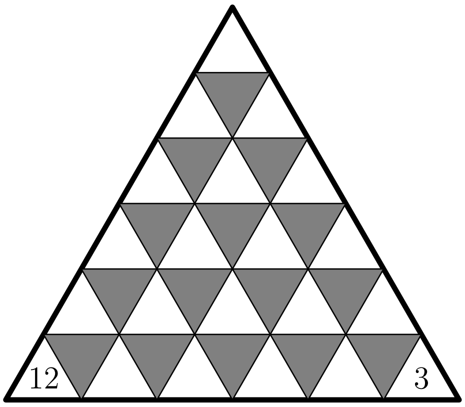
Zusammengefasst lauten die zwei Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(a, b) = (12, 9)$.

(W. Janous) □

Aufgabe 2. *In der Abbildung sollen alle leeren weißen Dreiecke mit ganzen Zahlen gefüllt werden, sodass die Summe der drei Zahlen in den weißen Nachbardreiecken jedes grauen Dreiecks durch 5 teilbar ist.*

Im linken unteren und im rechten unteren weißen Dreieck sind die Zahlen 12 bzw. 3 vorgegeben.

Man bestimme alle ganzen Zahlen, die im obersten weißen Dreieck stehen können.



G. Woeginger, TU Eindhoven, Niederlande

Lösung 1. Jede Zahl in der ausgefüllten Figur kann durch eine andere Zahl in derselben Restklasse modulo 5 ersetzt werden, ohne dass die Bedingungen verletzt werden. Es reicht daher, ausgehend von einer untersten Zeile mit beliebigen mittleren Einträgen a, b, c, d alle anderen Einträge modulo 5 zu berechnen.

Nehmen wir also an, dass in der untersten Zeile der Reihe nach die sechs Zahlen

$$12, \qquad a, \qquad b, \qquad c, \qquad d, \qquad 3$$

stehen. Dann stehen in der Zeile darüber (modulo 5 genommen) die fünf Zahlen

$$-2-a, \qquad -a-b, \qquad -b-c, \qquad -c-d, \qquad -d-3.$$

In der Zeile darüber stehen dann

$$2+2a+b, \qquad a+2b+c, \qquad b+2c+d, \qquad c+2d+3,$$

und in der Zeile darüber stehen

$$-2-3a-3b-c, \qquad -a-3b-3c-d, \qquad -b-3c-3d-3.$$

Die nächste Zeile enthält

$$2+4a+b+4c+d, \qquad a+4b+c+4d+3,$$

und das oberste Dreieck enthält schliesslich

$$-(2+4a+b+4c+d)-(a+4b+c+4d+3) \equiv 0.$$

Daher können in der oberen Ecke (völlig unabhängig von den Werten a, b, c, d) nur Vielfache von 5 stehen.

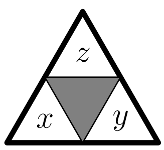
Da wir aber in unserer Rechnung alle Bedingungen auch verwendet haben, sind diese auch erfüllt und alle Vielfachen von 5 können auch tatsächlich erreicht werden.

(Th. Eisenkölbl, G. Woeginger) □

Lösung 2. Wir wollen zeigen, dass im obersten Dreieck genau alle Vielfachen von 5 stehen können. Dazu geben wir zuerst in Abbildung 1(a) ein Beispiel an, das zeigt, dass alle diese Zahlen tatsächlich möglich sind.

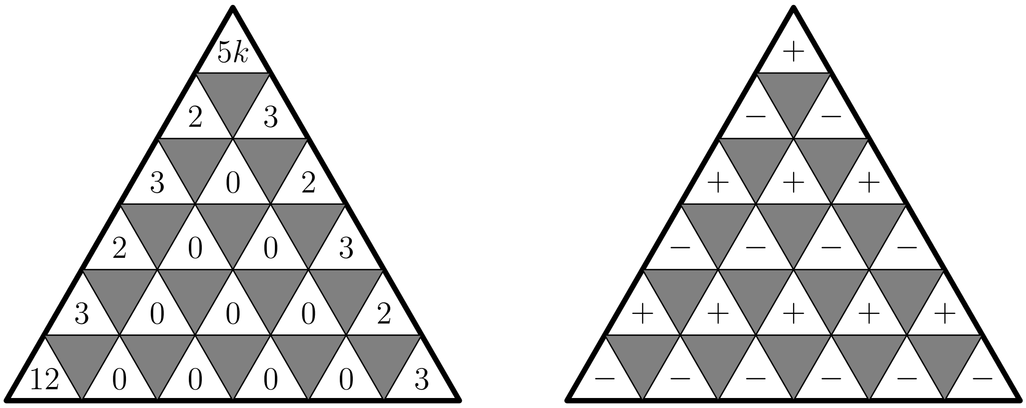
Um zu zeigen, dass nur die Vielfachen von 5 in Frage kommen, ändern wir das Vorzeichen jeder zweiten Zeile (siehe die ± in Abbildung 1(b)).

Aus der Bedingung $x+y+z \equiv 0 \pmod 5$ für



wird dadurch $x+y \equiv z \pmod 5$. Modulo 5 ist also jede Zahl in der Figur die Summe der beiden unmittelbar darunterstehenden. Für jede Zeile muss die Zahl im obersten Dreieck also modulo 5 eine Summe von Vielfachen der Zahlen in dieser Zeile sein.

Wie oft geht nun jede Zahl in diese Summe im obersten Dreieck ein? Wir nennen diese Anzahl Vielfachheit. Die oberste Zahl selbst hat natürlich Vielfachheit 1. Jede andere Zahl



(a) (b)

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 2

trägt zu den unmittelbar über ihr stehenden Zahlen bei. Ihre Vielfachheit ist also gerade die Summe der beiden Vielfachheiten über ihr, oder 1, wenn sie am Rand der Figur steht.

Die Vielfachheiten haben also genau die Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks und sind damit die Binomialkoeffizienten. Somit ist die Zahl an der Spitze modulo 5 von der Form

$$-\binom{5}{0}12-\binom{5}{1}a-\binom{5}{2}b-\binom{5}{3}c-\binom{5}{4}d-\binom{5}{5}3.$$

Da $5 \mid \binom{5}{i}$ für $0<i<5$, ist das gerade $-12-3 \equiv 0 \pmod 5$ wie gewünscht.

(T. Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir schreiben in die grauen Dreiecke die Zahlen in Abbildung 2.

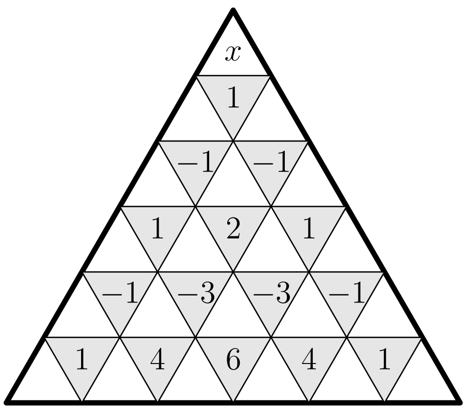


Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 3

Wir multiplizieren die Zahlen in den weißen Dreiecken mit der Summe der Zahlen in den benachbarten grauen Dreiecken und addieren alles modulo 5. Das ergibt eine Summe S. Es ist leicht an der Abbildung zu überprüfen, dass diese Summe 1 für die drei Eckdreiecke ist und 0 modulo 5 für alle anderen weißen Dreiecke ist. Wenn wir die Zahl im obersten weißen Dreieck x nennen, ist die gesamte Summe S also $12 + 3 + x \equiv x \pmod 5$.

Andererseits besteht die Summe S aus Vielfachen der Summen der Nachbarn grauer Dreiecke. Jede solche Summe von Nachbarn ist aber nach Voraussetzung immer durch 5 teilbar, damit ist auch S immer durch 5 teilbar.

Also gilt $x \equiv S \equiv 0 \pmod 5$.

Wie in Lösung 2 überprüft man an Abbildung 1(a), dass die Vielfachen von 5 auch tatsächlich alle erreicht werden können.

(T. Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$.*

Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.

R. Henner, Wien

Lösung 1. Um eine „Vorstellung" über die gesuchte Reihenfolge zu erhalten, wählt man einige Belegungen für die Zahlen a, b, c und d, etwa

1. $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ und $d = 3$: Dafür sind $x = 6$, $y = 2$ und $z = 3$.
2. $a = -3$, $b = -1$, $c = 2$ und $d = 4$: Nun sind $x = 11$, $y = -14$ und $z = -10$.

Man vermutet damit, dass die gesuchte Ordnung

$$y < z < x \tag{2}$$

lauten dürfte. Wir werden dies im Folgenden verifizieren.

Wir zerlegen (2) in zwei Teilungleichungen:

1. $y < z$, also
$$b \cdot c + a \cdot d < a \cdot c + b \cdot d.$$
Dies lautet in äquivalenter Form
$$(b - a) \cdot c < (b - a) \cdot d,$$
d.h.
$$(b - a) \cdot (d - c) > 0,$$
was wegen der Ordnung der Zahlen a, b, c und d klar ist.

2. $z < x$, also
$$a \cdot c + b \cdot d < a \cdot b + c \cdot d.$$
Wie zuerst ergibt sich nun die evidente Ungleichung
$$(d - a) \cdot (c - b) > 0.$$
Damit sind wir am Ende des Beweises.

(W. Janous) □

Lösung 2. Wie in der ersten Lösung gelangen wir zur Vermutung (2). Wir interpretieren x, y und z in geeigneter Weise als Skalarprodukte zweier Vektoren, nämlich

$$x = (a, d) \cdot (b, c), y = (a, b) \cdot (d, c) \text{ und } z = (a, b) \cdot (c, d) \text{ bzw. auch } z = (a, d) \cdot (c, b).$$

1. Damit haben wir für $y < z$ in äquivalenter Form:

$$(a, b) \cdot (d, c) < (a, b) \cdot (c, d).$$

   Dies ergibt sich aus der Umordnungsungleichung, weil die Vektoren (a, b) und (c, d) gleich geordnet sind.

2. $z < x$ ergibt sich in entsprechender Weise mittels

$$(a, d) \cdot (c, b) < (a, d) \cdot (b, c).$$

Bemerkung. Die Umordnungsungleichung besagt in ihrer allgemeinen Form: Es seien $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ zwei n-dimensionale Vektoren mit

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \text{ und } y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n,$$

wobei $n \geq 2$.

Wenn sich der Vektor $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ aus Y durch eine beliebige Permutation der Koordinaten ergibt, dann gilt

$$x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n \geq x_1 \cdot z_1 + x_2 \cdot z_2 + \cdots + x_n \cdot z_n \geq x_1 \cdot y_n + x_2 \cdot y_{n-1} + \cdots + x_n \cdot y_1.$$

Wenn $x_1 < \cdots < x_n$ und $y_1 < \cdots < y_n$, so tritt in der linken Ungleichung Gleichheit genau für $(z_1, \ldots, z_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ und in der rechten Ungleichung Gleichheit genau für $(z_1, \ldots, z_n) = (y_n, \ldots, y_1)$ ein.

(W. Janous) □

Aufgabe 4. *Es sei ABC ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB werden mit D, E bzw. F bezeichnet.*

Die beiden Schwerlinien AD und BE sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13{,}5$ haben.

Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie CF dieses Dreiecks.

K. Czakler, GRG 21, Wien

Lösung 1. Die drei Schwerlinien AD, BE und CF schneiden einander im Schwerpunkt S. Es ist bekannt, dass der Schwerpunkt die Schwerlinien im Verhältnis $2 : 1$ teilt. Daher erhalten wir

$$\overline{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AD} = 12, \qquad \overline{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BE} = 9.$$

Laut Angabe ist ASB ein rechtwinkeliges Dreieck, nach dem Satz von Pythagoras ergibt sich

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AS}^2 + \overline{SB}^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$$

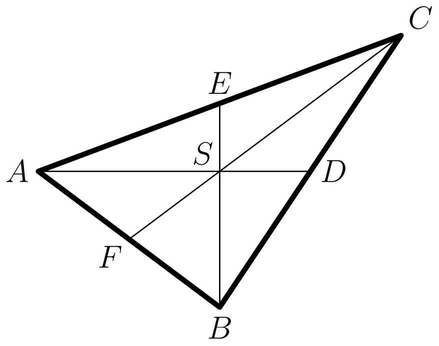


Abbildung 3: Aufgabe 4, Lösung 1.

Nach dem Satz von Thales liegt S auf dem Halbkreis über dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt F. Somit ist

$$\overline{SF} = \overline{FA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{15}{2}.$$

Da $\overline{FS} : \overline{SC} = 1 : 2$ erhalten wir

$$\overline{FC} = 3 \cdot \overline{FS} = \frac{45}{2}.$$

(C. Heuberger) □

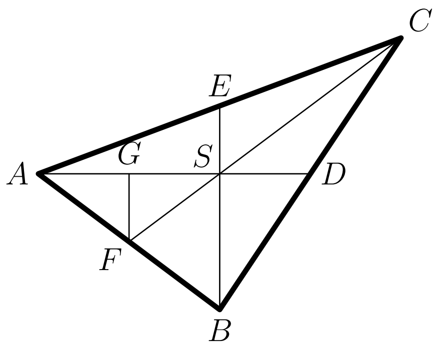


Abbildung 4: Aufgabe 4, Lösungen 1a und 1b.

Lösung 1a. Wie in Lösung 1 erhalten wir $\overline{AS} = 12$, $\overline{SB} = 9$ und $\overline{AB} = 15$ sowie die Orthogonalität von AS zu SB.

Eine Parallele zu SB durch F schneidet nach dem Strahlensatz die Strecke AS im Halbierungspunkt G. Die Strecken GS und GF haben die Längen 6 bzw. 4,5 und stehen aufeinander normal. Nach dem Satz von Pythagoras hat daher die Strecke FS die Länge 7,5 und die gesuchte Schwerlinie FC die Länge 22,5.

(R. Henner) □

Lösung 1b. Wie in Lösung 1a erhalten wir $\overline{AS} = 12$, $\overline{SB} = 9$ und $\overline{AB} = 15$ sowie die Orthogonalität von AS zu SB und konstruieren wir G.

Die rechtwinkeligen Dreiecke AGF und SGF sind kongruent (SWS-Satz) und ähnlich zum Dreick ASB im Verhältnis $1 : 2$. Daher ist die Strecke FS halb so lang wie AB. Weiter wie oben.

(R. Henner) □

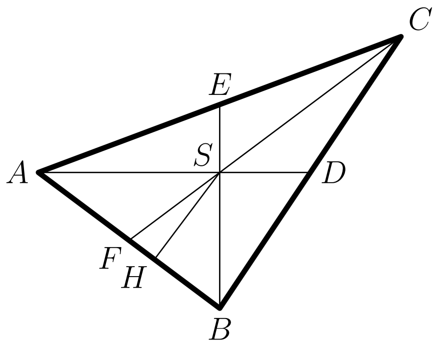


Abbildung 5: Aufgabe 4, Lösungen 1c und 1d.

Lösung 1c. Wie in Lösung 1 erhalten wir $\overline{AB} = 15$. Sei H der Lotfußpunkt von S auf AB.

Nach dem Kathetensatz im Dreieck ASB gilt

$$\overline{AB} \cdot \overline{HB} = \overline{SB}^2 \iff \overline{HB} = \frac{27}{5}.$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= 15 - \frac{27}{5} = \frac{48}{5}, \\ \overline{FH} &= \frac{15}{2} - \frac{27}{5} = \frac{21}{10}. \end{aligned}$$

Nach dem Höhensatz im Dreieck ASB gilt

$$\overline{SH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \iff \overline{SH} = \frac{36}{5}.$$

Der Satz von Pythagoras im Dreieck SHF ergibt

$$\overline{FS} = \sqrt{\overline{FH}^2 + \overline{HS}^2} = \frac{15}{2}.$$

Damit ist $\overline{FC} = 3\overline{FS} = 45/2$.

(C. Heuberger) □

Lösung 1d. Wie in Lösung 1 erhalten wir $\overline{AB} = 15$. Sei H der Lotfußpunkt von S auf AB. Wir berechnen zweimal den Flächeninhalt (ASB) des Dreiecks ASB:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{SH} = (ASB) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AS} \cdot \overline{SB} = 54.$$

Daraus ergibt sich $\overline{SH} = \frac{36}{5}$. Aus dem Satz von Pythagoras ergibt sich

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{BS}^2 - \overline{HS}^2} = \frac{27}{5}.$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{HF} = \overline{BF} - \overline{BH} = \frac{21}{10}.$$

Nun ergibt sich $\overline{FS}$ wiederum durch den Satz von Pythagoras als

$$\overline{FS} = \sqrt{\overline{FH}^2 + \overline{HS}^2} = \frac{15}{2}.$$

Damit ist $\overline{FC} = 3\overline{FS} = 45/2$.

(C. Heuberger) □

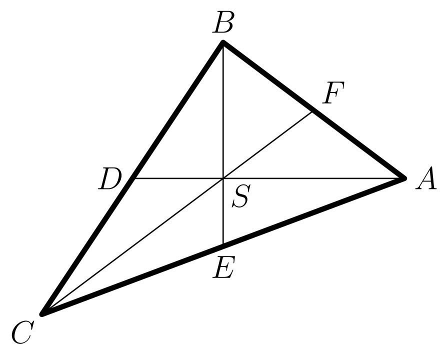


Abbildung 6: Aufgabe 4, Lösung 2.

Lösung 2. Wir nutzen wieder die Tatsache, dass sich die Schwerlinien im Schwerpunkt teilen und dass dieser die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1 teilt. Durch geeignete Drehung und Verschiebung können wir die Koordinaten

$$S = (0, 0), \quad A = (12, 0), \quad D = (-6, 0), \quad B = (0, 9), \quad E = (0, -9/2)$$

annehmen. Es ergibt sich

$$F = \frac{1}{2}(A + B) = (6, 9/2) \text{ und } C = B + 2(D - B) = (0, 9) + 2(-6, -9) = (-12, -9).$$

Daraus ergibt sich

$$\overline{CF} = \sqrt{(-12 - 6)^2 + (-9 - 9/2)^2} = 45/2.$$

(C. Heuberger) □

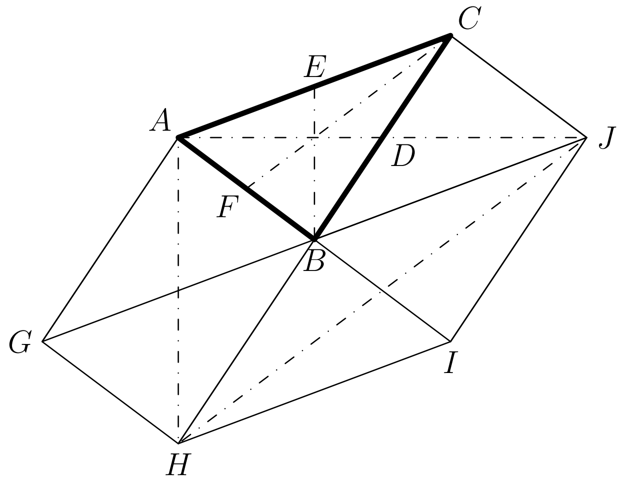


Abbildung 7: Aufgabe 4, Lösung 3.

Lösung 3. Wir vervollständigen das Dreieck ABC zu den zwei Parallelogrammen $ABJC$ und $AGBC$. Dann vervollständigen wir das Dreieck AGB zum Parallelogramm $AGHB$ und das Dreieck BJC zu $BIJC$. Damit ergibt sich, dass auch $BHIJ$ ein Parallelogramm ist, vgl. Abbildung 7.

Da D der Mittelpunkt der Strecke BC ist, ist D der Mittelpunkt des Parallelogramms $ABJC$ und daher ist die Strecke AJ doppelt so lang wie AD. Mit Hilfe der Parallelogramme folgt auch, dass die Strecke JH parallel zu CF liegt und doppelt so lang wie CF ist und dass die Strecke AH parallel zu EB liegt und doppelt so lang wie EB ist. Weil AD und BE aufeinander normal stehen, ist $\measuredangle HAJ$ ein rechter Winkel, d.h. HAJ ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Kathetenlängen $2\overline{AD}$, $2\overline{EB}$ und der Hypotenusenlänge $2\overline{CF}$. Daraus erhalten wir schließlich wegen $\overline{CF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{AD}^2$, dass

$$\overline{CF} = \sqrt{13{,}5^2 + 18^2},$$

also $\overline{CF} = 22{,}5$.

(W. Janous) □

Lösung 4. Nach dem Strahlensatz (bzw. dessen Umkehrung) ist ED parallel zu AB und halb so lang. Verdoppelt man ED zu EI, so erhält man das Parallelogramm $ABIE$. Darin sind offensichtlich AD und FI gleich lang. Da E der Halbierungspunkt von AC ist, ist auch $BICE$ ein Parallelogramm und IC und BE sind gleich lang. Im rechtwinkeligen Dreieck FIC kann man nun FC als

$$\overline{FC} = \sqrt{\overline{FI}^2 + \overline{IC}^2} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{18^2 + 13{,}5^2} = 22,5$$

ausrechnen.

(R. Henner) □

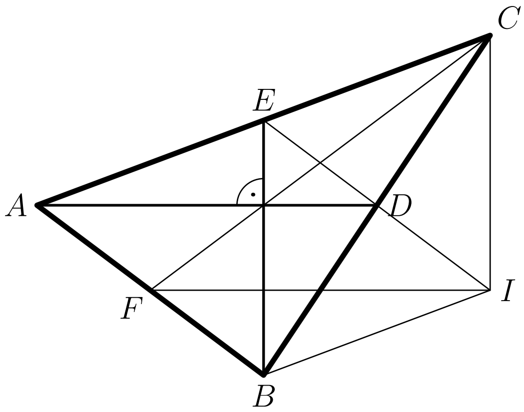


Abbildung 8: Aufgabe 4, Lösung 4.

Lösung 5. In jedem Dreieck gilt

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=D-A+E-B+F-C=\frac{B+C}{2}-A+\frac{C+A}{2}-B+\frac{A+B}{2}-C=0.$$

Daher lassen sich die drei Schwerlinien immer zu einem Dreieck parallelverschieben.

In dieser Aufgabe handelt es sich um ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel gegenüber der Seite mit der Länge $\overline{CF}$. Nach Pythagoras gilt daher

$$\overline{CF}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{BE}^2}=\sqrt{18^2+13{,}5^2}=22{,}5.$$

(Th. Eisenkölbl) □