55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

21. März 2024

Aufgabe 1. *Es seien a, b und c reelle Zahlen größer als 1. Man beweise die Ungleichung*

$$\frac{ab}{c-1}+\frac{bc}{a-1}+\frac{ca}{b-1}\geq 12.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir setzen $x=a-1, y=b-1$ und $z=c-1$. Dann gilt $x,y,z>0$ und die Ungleichung schreibt sich in der Form

$$\sum_{cyc}\frac{xy+x+y+1}{z}\geq 12.$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 12$$

Mit der AM-GM Ungleichung gilt

$$\sum_{cyc}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 6$$

und

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 6$$

und damit ist alles gezeigt. Gleichheit gilt für $a=b=c=2$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Es gilt

$$\sqrt{(c-1)\cdot 1}\leq\frac{c-1+1}{2},$$

also

$$c-1\leq\frac{c^2}{4}$$

mit Gleichheit für $c=2$. Mit den beiden analogen Abschätzungen folgt

$$\frac{ab}{c-1}+\frac{bc}{a-1}+\frac{ca}{b-1}\geq\frac{4ab}{c^2}+\frac{4bc}{a^2}+\frac{4ca}{b^2}\geq 12\sqrt[3]{\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{bc}{a^2}\cdot\frac{4ca}{b^2}}=12$$

wobei die letzte Ungleichung mit der AM-GM Ungleichung folgt. Gleichheit gilt für $a=b=c=2$.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Wir schätzen die linke Seite von

$$\frac{ab}{c-1}+\frac{bc}{a-1}+\frac{ca}{b-1}\geq 12$$

mit der AM-GM Ungleichung ab, also

$$\frac{ab}{c-1} + \frac{bc}{a-1} + \frac{ca}{b-1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab}{c-1} \cdot \frac{bc}{a-1} \cdot \frac{ca}{b-1}}.$$

Deshalb bleibt noch der Nachweis von

$$\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}} \geq 4,$$

d.h.

$$\frac{a^2}{a-1} \cdot \frac{b^2}{b-1} \cdot \frac{c^2}{c-1} \geq 64.$$

Weil in dieser Ungleichung jede der drei Variablen gleichberechtigt ist, liegt die Behauptung

$$\frac{a^2}{a-1} \geq 4$$

für alle $a > 1$ auf der Hand. Diese Ungleichung ist aber äquivalent zu $a^2 \geq 4a - 4$, d.h. $(a-2)^2 \geq 0$ mit Gleichheit genau für $a = 2$.

Damit folgt die Ungleichung samt dem einzigen Gleichheitsfall $a = b = c = 2$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Der Umkreis des Dreiecks BHC schneide AC ein weiteres Mal im Punkt P und AB ein weiteres Mal im Punkt Q.*

Man zeige, dass H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ ist.

(Karl Czakler)

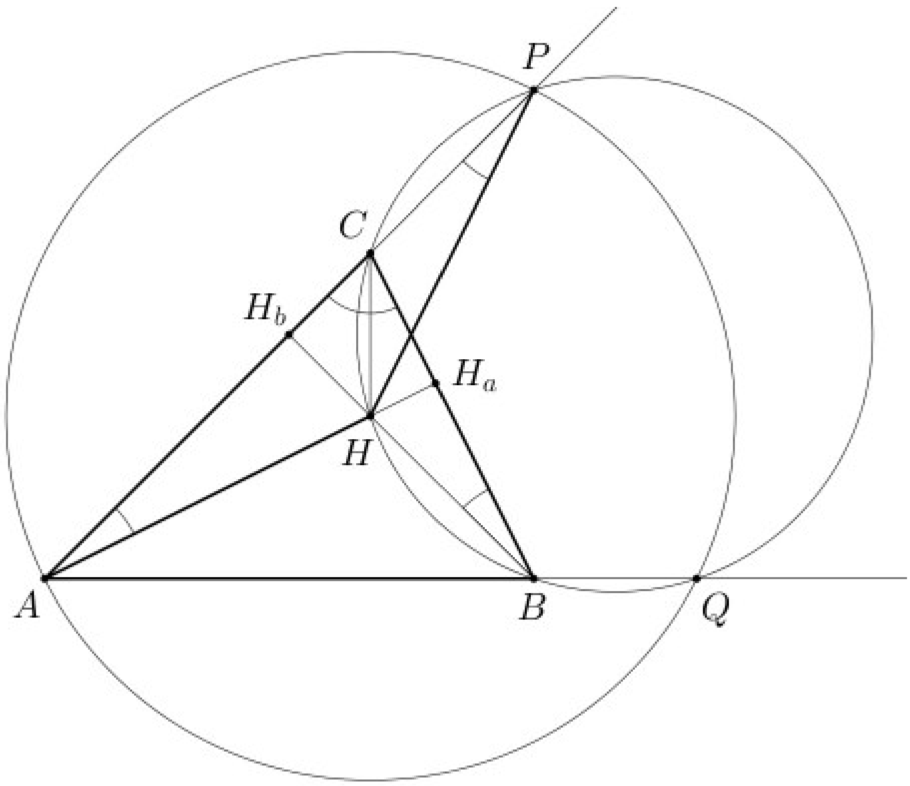

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. siehe Abbildung 1

Sei H_a der Fußpunkt der Höhe auf die Seite a. Mit der Winkelsumme im Dreieck AH_aC gilt

$$\angle HAC = 90° - \angle BCA.$$

Sei H_b der Fußpunkt der Höhe auf die Seite b. Wiederum mit der Winkelsumme im Dreieck CH_bB ist somit

$$\angle CBH = 90° - \angle BCA.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt

$$\angle CPH = \angle CBH,$$

und somit

$$\angle CPH = \angle HAC.$$

Daher ist das Dreieck AHP gleichschenkelig, und es gilt $AH = PH$. Analog zeigt man $AH = QH$, und somit ist H der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ.

(Karl Czakler) □

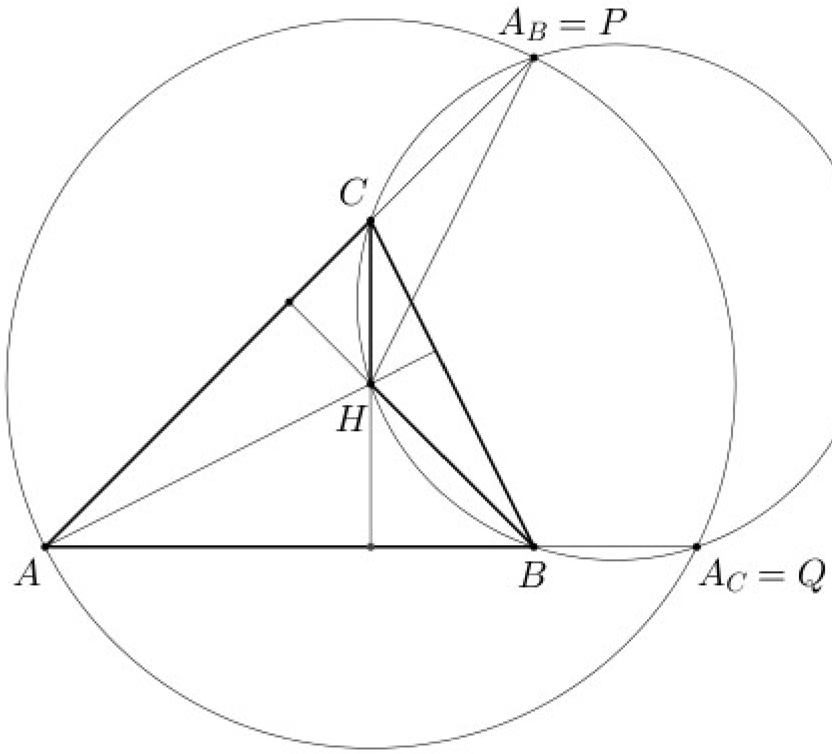

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 1a

Lösung 1a. siehe Abbildung 2

Der Punkt A ist offensichtlich der Höhenschnittpunkt von BCH. Deswegen gilt bekanntermaßen, dass die Spiegelungen A_B und A_C von A an den Dreiecksseiten BH und CH auf dem Umkreis von BCH liegen. Da die Strecke AA_B normal auf BH steht, und AA_C normal auf CH, ist $A_B = P$ und $A_C = Q$. Somit gilt aufgrund der Spiegelsymmetrie, dass $PH = AH$ und $QH = AH$, und H ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks APQ.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Auf einem Tisch sind zehntausend Streichhölzer, von denen zwei in einer Schüssel liegen.*

Anna und Bernd spielen folgendes Spiel: Abwechselnd machen sie einen Zug, Anna beginnt. Ein Zug besteht darin, die Streichhölzer in der Schüssel abzuzählen, einen echten Teiler d dieser Anzahl auszuwählen und d Streichhölzer in die Schüssel dazuzugeben. Das Spiel ist zu Ende, wenn mehr als 2024 *Streichhölzer in der Schüssel sind. Wer den letzten Zug gemacht hat, hat gewonnen.*

Man beweise, dass Anna gewinnen kann, unabhängig davon, wie Bernd spielt.

(Anmerkung: Ein echter Teiler von n ist ein Teiler von n, der kleiner als n ist.)

(Richard Henner)

Lösung 1. Annas Strategie ist es, immer ein Streichholz in die Schüssel dazuzulegen, solange sie weniger als 1350 Streichhölzer vorfindet.

Mit dieser Strategie wird sie immer aus einer geraden Anzahl eine ungerade Anzahl machen, sodass dann Bernd gezwungen ist, einen ungeraden Teiler zu wählen und ihr wieder eine gerade Anzahl zu überlassen.

Bernd findet höchstens 1350 Streichhölzer vor und kann höchstens ein Drittel dazugeben, da es keinen größeren ungeraden echten Teiler geben kann. Da $1350 + \frac{1}{3} \cdot 1350 = 1350 + 450 = 1800 < 2024$, kann er also in dieser Spielphase nicht mehr als 2024 Streichhölzer erreichen.

Somit kommt ein Zug, in dem Anna eine gerade Anzahl von mindestens 1350 Streichhölzer vorfindet. Sie kann daher die Hälfte dazugeben und erhält mindestens $1350 + \frac{1}{2} \cdot 1350 = 1350 + 675 = 2025$ Streichhölzer und hat damit gewonnen.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Im ersten Zug muss Anna 1 wählen, dann sind 3 Streichhölzer in der Schüssel.

Im zweiten Zug muss nun Bernd 1 wählen, dann sind 4 Streichhölzer in der Schüssel.

Im dritten Zug hat Anna zwei Möglichkeiten, sie kann entweder 1 oder 2 wählen, danach sind 5 oder 6 Streichhölzer in der Schüssel.

Fall 1: Wer am Zug ist, wenn 6 Streichhölzer in der Schüssel sind, hat eine sichere Strategie zu gewinnen.

In diesem Fall wählt Anna im dritten Zug 1 aus, sodass Bernd 5 Streichhölzer in der Schüssel vorfindet, den Teiler 1 auswählen muss, und Anna nun ausgehend von 6 Streichhölzern sicher gewinnen kann.

Fall 2: Wer am Zug ist, wenn 6 Streichhölzer in der Schüssel sind, hat keine sichere Strategie zu gewinnen, d.h. die andere Person hat eine Strategie.

In diesem Fall wählt Anna im dritten Zug 2 aus, sodass Bernd nun 6 Streichhölzer vorfindet und somit Anna gewinnen kann.

Da einer der beiden Fälle stimmen muss, gibt es für Anna eine Strategie, sicher zu gewinnen, auch wenn wir nicht herausgefunden haben, welche es ist. (Wie wir aber in Lösung 1 gesehen haben, trifft Fall 1 zu.)

(Stefan Leopoldseder) □

Aufgabe 4. *Es sei n eine positive ganze Zahl.*

Man beweise, dass $a(n) = n^5 + 5^n$ genau dann durch 11 *teilbar ist, wenn auch $b(n) = n^5 \cdot 5^n + 1$ durch* 11 *teilbar ist.*

(Walther Janous)

Lösung 1. Die Werte von $n^5 \bmod 11$ ergeben für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ durch direkte Rechnung die Liste $0, 1, -1, 1, 1, 1$. Da die übrigen Restklassen für n das Negative bereits überprüfter Restklassen sind, kann n^5 also nur die Werte $0, 1, -1$ modulo 11 annehmen. Wir gehen jetzt diese drei Fälle durch.

- $n^5 \equiv 1 \bmod 11$

  Dann gilt $a(n) \equiv 1 + 5^n = 5^n + 1 \equiv b(n) \bmod 11$. Somit gilt in diesem Fall die Behauptung.

- $n^5 \equiv -1 \bmod 11$

  Hier erhalten wir $a(n) \equiv -1 + 5^n = -(-5^n + 1) \equiv -b(n) \mod 11$, woraus sich wieder sofort ergibt, dass die linke Seite genau dann Null ist, wenn die rechte Seite Null ist.

- $n^5 \equiv 0 \bmod 11$.

  In diesem Fall gilt $a(n) \equiv 5^n \bmod 11$ und $b(n) \equiv 1 \bmod 11$, sodass offensichtlich beide nicht durch 11 teilbar sind.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wenn n durch 11 teilbar sind, so sind beide Aussagen falsch und die Äquivalenz somit erfüllt. Wenn n nicht durch 11 teilbar ist, gilt nach dem kleinen Satz von Fermat, dass $n^{10} - 1$ durch 11 teilbar ist. Die Behauptung folgt deshalb aus $11 \mid (n^{10} - 1)(5^{2n} - 1) = b(n)^2 - a(n)^2$ bzw. noch schneller aus

$$n^5 a(n) = n^{10} + n^5 \cdot 5^n \equiv b(n) \pmod{11}.$$

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 3. Die Folge $(n^5)_{n\geq 1}$ beginnt modulo 11 mit 1, 10, 1, 1, 1, 10, 10, 10, 1, 10, 0 und wiederholt sich dann. Die Folge $(5^n)_{n\geq 1}$ beginnt modulo 11 mit 5, 3, 4, 9, 1 und wiederholt sich dann. Die Periodenlängen sind also 11 und 5. Deshalb haben die zwei Folgen $(a(n))_{n\geq 1}$ und $(b(n))_{n\geq 1}$ modulo 11 jeweils Periodenlänge $11 \cdot 5 = 55$.

Somit brauchen wir die Äquivalenz nur für die ersten 55 Werte von n zu überprüfen. Wir erhalten die Tabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n^5 mod 11	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	0
5^n mod 11	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1	5
$a(n)$ mod 11	6	2	5	-1	2	4	2	3	-1	0	5
$b(n)$ mod 11	6	-2	5	-1	2	-4	-2	-3	-1	0	1

und analog

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$a(n)$ mod 11	4	3	-1	2	6	2	3	8	2	4	3
$b(n)$ mod 11	4	8	-1	2	6	9	8	3	2	7	1

n	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$a(n)$ mod 11	5	8	2	6	4	3	8	0	6	2	4
$b(n)$ mod 11	5	3	2	6	4	8	3	0	6	9	1

n	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$a(n)$ mod 11	-1	0	6	4	5	8	0	4	4	3	9
$b(n)$ mod 11	-1	0	6	4	5	3	0	7	4	8	1

n	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
$a(n)$ mod 11	2	4	4	5	-1	0	4	2	5	8	1
$b(n)$ mod 11	2	7	4	5	-1	0	7	9	5	3	1

Insbesondere sind $a(n)$ und $b(n)$ genau dann durch 11 teilbar, wenn

$$n \in \{10, 30, 35, 40, 50, 65, 85, 90, 95, \ldots\}.$$

(Walther Janous) □