54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

30. März 2023

Aufgabe 1. *Es seien a, b und c reelle Zahlen mit $0 \leq a, b, c \leq 2$. Man beweise, dass*

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leq 2$$

gilt, und man gebe an, wann Gleichheit eintritt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir ordnen die Variablen der Größe nach:

Für $a \geq b \geq c$ sind alle drei Faktoren positiv und daher gilt $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$.

Für $b \geq c \geq a$ und $c \geq a \geq b$ sind jeweils zwei Faktoren negativ und ein Faktor positiv, daher gilt auch hier $(a-b)(b-c)(a-c) \geq 0$.

Bei jeder anderen Ordnung der Variablen sind entweder alle drei Faktoren negativ oder jeweils zwei Faktoren positiv und ein Faktor negativ. Daher gilt $(a-b)(b-c)(a-c) \leq 0$ und die Ungleichung ist für diese Fälle gezeigt, ohne dass sich ein Gleichheitsfall ergibt.

Es sei nun $a \geq b \geq c$. Mit der geometrisch-arithmetischen Mittelungleichung folgt

$$(a-b)(b-c) \leq \frac{(a-b+b-c)^2}{4} = \frac{(a-c)^2}{4}.$$

Daher gilt

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^2}{4}(a-c) = \frac{(a-c)^3}{4} \leq \frac{2^3}{4} = 2.$$

Analog behandelt man die beiden anderen Fälle.

Gleichheit gilt für $a - c = 2$ und $a - b = b - c$, daraus folgt $a = 2$, $b = 1$ und $c = 0$. Gleichheit gilt also für die Tripel $(2, 1, 0), (1, 0, 2)$ und $(0, 2, 1)$.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir setzen $x = a - b$ und $y = b - c$. Damit folgt $a - c = x + y$. Dabei haben wir $|x| \leq 2$, denn es gilt $0 - 2 \leq a - b \leq 2 - 0$. Entsprechend ergeben sich $|y| \leq 2$ und $|x + y| \leq 2$, insbesondere also $-2 - y \leq x \leq 2 - y$. Wir müssen somit die Ungleichung

$$xy(x+y) \leq 2, \text{ d.h. } x^2y + xy^2 - 2 \leq 0$$

nachweisen. Dies ist für $y = 0$ klar (ohne Gleichheitsfall). Im Weiteren halten wir $y \in [-2; 2] \setminus \{0\}$ fest, definieren das quadratische Polynom $f(x) = x^2y + xy^2 - 2$ und haben

$$f(x) \leq 0$$

zu zeigen. (Der Graph von f ist eine Parabel mit dem Scheitel bei $x_0 = -y/2$.) Wir unterscheiden nun zwei Möglichkeiten.

a) Für $y > 0$ haben wir eine nach oben offene Parabel über dem Intervall $I = [-2; 2-y]$ zu betrachten. Wegen $x_0 \in I$ liegt das Maximum von f über dem Rand von I. Es gilt $f(-2) = 4y - 2y^2 - 2$, d.h. $f(-2) = -2(y-1)^2$. Damit ist $f(-2) \leq 0$. Weil x_0 der Mittelpunkt von I ist, folgt $f(2-y) = f(-2)$. Außerdem haben wir $f(x) = 0 \iff y = 1$ samt $x \in \{-2, 1\}$.

b) Für $y < 0$ haben wir eine nach unten offene Parabel über dem Intervall $[-2-y; 2]$ zu untersuchen. Ihr Maximum liegt bei x_0 und es ist

$$f\Big(-\frac{y}{2}\Big) = \Big(-\frac{y}{2}\Big)^2 y - \frac{y}{2}y^2 - 2 = -\frac{y^3}{4} - 2 = \frac{(-y)^3}{4} - 2.$$

Mit $-y \leq 2$ ergibt sich $f(-y/2) \leq 0$ mit Gleichheit genau für $y = -2$. Dafür ist $x = 1$.

Die zuvor bestimmten Gleichheitsfälle führen auf:

1) $x = -2$ und $y = 1$, d.h. $a = b - 2$ und $b = c + 1$, also $a = 0$, $b = 2$ und $c = 1$,

2) $x = 1$ und $y = 1$, d.h. $a = b + 1$ und $b = c + 1$, also $a = 2$, $b = 1$ und $c = 0$ bzw.

3) $x = 1$ und $y = -2$, d.h. $a = b + 1$ und $b = c - 2$, also $a = 1$, $b = 0$ und $c = 2$.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Es gibt sechs Möglichkeiten, wie die drei Variablen der Größe nach angeordnet sein können. Für drei davon, nämlich $a \leq b \leq c$, $b \leq c \leq a$ und $c \leq a \leq b$ ist die linke Seite negativ oder Null, daher ist die Ungleichung in diesem Fall richtig und es tritt auch kein Gleichheitsfall ein.

Für die anderen drei Anordnungen $a \geq b \geq c$, $b \geq c \geq a$ und $c \geq a \geq b$ sieht man sofort, dass sie durch zyklische Vertauschung der Variablen a, b, c auseinander hervorgehen und dass auch die zu zeigende Ungleichung bis auf diese Vertauschung exakt dieselbe ist.

Es reicht also, die Ungleichung für den Fall $a \geq b \geq c$ zu beweisen. Wir setzen $x = a - b$ und $y = b - c$ und haben somit die Einschränkungen $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ und $0 \leq x + y \leq 2$.

Zu zeigen ist die Ungleichung

$$xy(x + y) \leq 2.$$

Da alle drei Faktoren positiv sind, wird die linke Seite nur größer, wenn man x größer macht. Es reicht also, die Ungleichung für den größtmöglichen Wert von x zu zeigen, der erreicht wird, wenn der Faktor $x + y$ an seine obere Grenze 2 stößt. Somit gilt also ab jetzt $x + y = 2$ und wir wollen

$$x(2 - x) \cdot 2 \leq 2$$

zeigen, was offensichtlich äquivalent zu

$$0 \leq 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x - 1)^2$$

ist.

Die Ungleichung ist also richtig und Gleichheit gilt für $x = 1$ und $x + y = 2$, was den Werten $a = 2$, $b = 1$ und $c = 0$ entspricht.

Da wir uns oben auf eine der drei zyklischen Vertauschungen beschränkt haben, müssen wir in die Liste der Gleichheitsfälle noch die zyklischen Vertauschungen dieses Ergebnisses aufnehmen und erhalten für (a, b, c) die Fälle $(2, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 2, 1)$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 2. *Sei $ABCD$ eine Raute mit $\sphericalangle BAD < 90°$. Der Kreis durch D mit Mittelpunkt A schneide die Gerade CD ein zweites Mal im Punkt E. Der Schnittpunkt der Geraden BE und AC sei S.*

Man beweise, dass die Punkte A, S, D und E auf einem Kreis liegen.

(Karl Czakler)

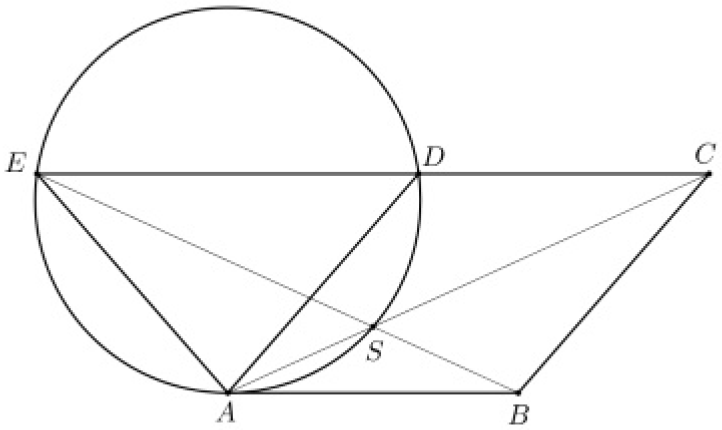

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

Lösung 1. Das Viereck $ABCE$ ist ein gleichschenkeliges Trapez und besitzt daher einen Umkreis. Mit dem Peripheriewinkelsatz gilt dann

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BEC = \sphericalangle SED.$$

Weiters gilt aus Symmetriegründen

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle SAD,$$

und daher

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SED.$$

Damit folgt mit dem Peripheriewinkelsatz die Behauptung.

(Karl Czakler) □

Lösung 1a. Es reicht aufgrund des Peripheriewinkelsatzes zu zeigen, dass $\sphericalangle SED = \sphericalangle SAD$.

Da $ABCD$ eine Raute ist, gilt aber

$$\sphericalangle SAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD.$$

Da $ABCE$ ein gleichschenkeliges Trapez ist, gilt aus Symmetriegründen, dass

$$\sphericalangle SED = \sphericalangle ECS = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD,$$

womit alles bewiesen ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die es zwei Anordnungen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ gibt, sodass $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$ aufeinander folgende natürliche Zahlen sind.*

(Walther Janous)

Antwort. Es funktioniert genau dann, wenn n ungerade ist.

Lösung 1. Wir haben

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = 2(1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1).$$

Andererseits gibt es eine natürliche Zahl N, sodass

$$a_1+b_1=N, a_2+b_2=N+1,\ldots,a_n+b_n=N+n-1$$

und damit

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=nN+(1+\ldots+(n-1))=nN+n(n-1)/2$$

gelten.

Folglich gilt $n(n+1)=nN+n(n-1)/2$ und damit $N=n+1-\frac{n-1}{2}=\frac{n+3}{2}$. Deshalb ist N genau dann ganzzahlig, wenn n eine ungerade natürliche Zahl ist.

Wir müssen nun untersuchen, ob es für jede ungerade Zahl n mit $n\geq 3$ zwei geeignete Anordnungen gibt. Sei $n=2k+1$ mit $k\geq 1$.

Experimente mit $k=1$ und $k=2$ führen zum Beispiel auf folgendes Muster:

$$\begin{pmatrix} 1 & k+2 & 2 & k+3 & 3 & \ldots & 2k+1 & k+1 \\ k+1 & 1 & k+2 & 2 & k+3 & \ldots & k & 2k+1 \end{pmatrix}$$

Damit ergeben sich die $2k+1$ aufeinander folgenden Zahlen $k+2,k+3,\ldots,3k+1,3k+2$.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Da die Zahlen $1,2,\ldots n$ die Summe $n(n+1)/2$ und somit den Durchschnitt $(n+1)/2$ haben, müssen die Summen der beiden Anordnungen den Durchschnitt $n+1$ haben. Der Durchschnitt von aufeinanderfolgenden Zahlen ist aber genau dann eine ganze Zahl, wenn es sich um ungerade viele Zahlen handelt. Somit können die geforderten Anordnungen für gerades n nicht existieren.

Für ungerades $n=2k-1$ betrachten wir die Summen

$$(k+1,(k+1)+2,\ldots,(2k-1)+k)=(k+1,k+3,\ldots,3k-1)$$

sowie die Summen

$$(1+(k+1),2+(k+2),\ldots,(k-1)+(2k-1))=(k+2,k+4,\ldots,3k-2).$$

Die ergeben offensichtlich nach geeigneter Umsortierung aufeinanderfolgende Zahlen von $k+1$ bis $3k-1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Paare (x,y) von positiven ganzen Zahlen, sodass für $d=\mathrm{ggT}(x,y)$ die Gleichung*

$$xyd=x+y+d^2$$

gilt.

(Walther Janous)

Antwort. Es gibt drei Lösungspaare, nämlich $(x,y)=(2,2)$, $(x,y)=(2,3)$ und $(x,y)=(3,2)$.

Lösung 1. Wäre (beispielsweise) $x=1$ und damit $d=1$, so würde sich der Widerspruch $y=y+2$ ergeben.

Wir dürfen deshalb für das Folgende $x\geq 2$ und $y\geq 2$ voraussetzen.

Wir betrachten zuerst den Fall $d=1$, also die Gleichung

$$xy=x+y+1 \iff (x-1)(y-1)=2.$$

Mit Hilfe der Zerlegungen $2=1\cdot 2$ und $2=2\cdot 1$ ergeben sich die zwei Lösungspaare $(x,y)=(2,3)$ bzw. $(x,y)=(3,2)$, weil jeweils $\mathrm{ggT}(x,y)=1$ erfüllt ist.

Im Weiteren soll $d \geq 2$ gelten. Unsere Gleichung lautet in äquivalenter Form

$$\frac{1}{xd} + \frac{1}{yd} + \frac{d}{xy} = 1.$$

Wegen $xd \geq 4$ und $yd \geq 4$ erhalten wir

$$1 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{d}{xy} \iff xy \leq 2d.$$

Dies und $xy \geq d^2$ ergeben $d = 2$, $x = y = 2$ und wegen $\operatorname{ggT}(2, 2) = 2$ das dritte Lösungspaar $(x, y) = (2, 2)$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir zeigen zuerst, dass $x \geq 2$ und $y \geq 2$ gelten. Denn, wäre beispielsweise $x = 1$ und damit $d = 1$, so ergäbe sich der Widerspruch $y = y + 2$.

Mit Hilfe der evidenten Ungleichungen $x \geq d$ und $y \geq d$ erhalten wir $dxy \leq x + y + xy$, d.h. $d \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1$ und damit $d \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$, also $d \leq 2$.

- Für $d = 1$ lautet unsere Gleichung $xy = x+y+1$, d.h. $(x-1)(y-1) = 2$. Dies und $\{x-1, y-1\} = \{1, 2\}$ führen auf $\{x, y\} = \{2, 3\}$. Deshalb sind x und y teilerfremd und ergeben deshalb die zwei Lösungspaare $(x, y) = (2, 3)$ und $(x, y) = (3, 2)$.
- Für $d = 2$ erhalten wir $2xy = x+y+4$, d.h. $2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{xy}$. Dies und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{xy} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{4}{2\cdot 2} = 2$ ergeben unmittelbar $x = 2$ und $y = 2$. Wegen $\operatorname{ggT}(2, 2) = 2$ haben wir das dritte Lösungspaar $(x, y) = (2, 2)$ erhalten.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Da alle Zahlen positiv und ganz sind und natürlich $d \leq x$ und $d \leq y$ gelten, erhalten wir

$$xyd = x + y + d^2 \leq xy + xy + xy = 3xy$$

und somit $d \leq 3$ und es bleiben drei Fälle zu untersuchen.

- Fall 1: Für $d = 1$ wird die Gleichung zu

  $$(x-1)(y-1) = 2,$$

  sodass die einzigen Lösungen $(x, y) = (2, 3)$ sowie $(x, y) = (3, 2)$ sind, die auch wirklich den gewünschten $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$ haben.
- Fall 2: Für $d = 2$ wird die Gleichung nach Multiplikation mit 2 zu

  $$(2x-1)(2y-1) = 9.$$

  Hier gibt es also die Möglichkeiten $(2x-1, 2y-1) \in \{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$ und damit $(x, y) \in \{(1, 5), (2, 2), (5, 1)\}$, wovon nur das Paar $(2, 2)$ den gewünschten ggT besitzt.
- Fall 3: Für $d = 3$ wird die Gleichung nach Multiplikation mit 3 zu

  $$(3x-1)(3y-1) = 28.$$

  Die Teiler von 28 sind $1, 2, 4, 7, 14, 28$, wovon nur 2 und 14 die gewünschte Form $3k-1$ haben. Also bleiben uns die Kandidaten $(x, y) \in \{(1, 5), (5, 1)\}$, die aber nicht den gewünschten ggT haben.

(Den dritten Fall könnte man auch ausschließen, indem man im Argument zu Beginn feststellt, dass nur für $x = y$ die Gleichheit in der Ungleichung gelten kann und somit $d < 3$ folgt.)

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 4. Mit $x = ad$ und $y = bd$ samt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ haben wir

$$abd^2 = a + b + d$$

zu untersuchen. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, beispielsweise mit

- Methode 1. Wir berechnen a und erhalten

  $$a = \frac{b + d}{bd^2 - 1},$$

  falls $bd^2 \neq 1$ erfüllt ist.

  a) Für $bd^2 = 1$ ergeben sich $b = 1$ und $d = 1$ und damit der Widerspruch $a = a + 2$.

  b) Für $bd^2 > 1$ unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich

     * Fall 1. Für $d = 1$ ergeben sich wegen $a = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1}$, dass $b = 2$ und $a = 3$ oder $b = 3$ und $a = 2$ sind. Damit haben wir die zwei Lösungspaare $(x, y) = (2, 3)$ und $(x, y) = (3, 2)$ bestimmt, denn es ist jeweils $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$ erfüllt.
     * Fall 2. Für $d \geq 2$ haben wir $a \leq 1$, denn es gilt

       $$\frac{b + d}{bd^2 - 1} \leq 1 \iff b + d \leq bd^2 - 1 \iff d + 1 \leq b(d^2 - 1) \iff 1 \leq b(d - 1)$$

       mit Gleichheit genau dann, wenn $b = 1$ und $d = 2$ gelten, also $x = 2$ und $y = 2$ sind. Damit ist wegen $\mathrm{ggT}(2, 2) = 2$ das dritte Lösungspaar $(x, y) = (2, 2)$ bestimmt.

- Methode 2. Wir unterscheiden zwei Fälle für d.

  ◦ Für $d = 1$ erhalten wir $ab = a + b + 1$, d.h. $(a - 1)(b - 1) = 2$ $(= 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1)$, also $a = 2$ und $b = 3$ oder $a = 3$ und $b = 2$ samt $(x, y) = (2, 3)$ oder $(x, y) = (3, 2)$.

  ◦ Für $d \geq 2$ ergibt sich, ausgehend von $abd^2 = a + b + d$, dass $d = abd^2 - a - b > abd^2 - ad - bd$. Folglich erhalten wir (mit Hilfe einer 'Ergänzung auf ein Rechteck') $d + 1 > (ad - 1)(bd - 1)$ und damit $d + 1 > (d - 1)(d - 1)$, also $d^2 < 3d$, d.h. $d < 3$. Deshalb bleibt nur noch der Fall $d = 2$ zu klären. Wegen $4ab = a + b + 2$ haben wir $4ab \leq a + b + a + b = 2a + 2b$, d.h. $(2a - 1)(2b - 1) \leq 1$, und deshalb $a = b = 1$ samt $(x, y) = (2, 2)$.

(Walther Janous) □