# 52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

25. März 2021

---

**Aufgabe 1.** *Seien $a$ und $b$ positive ganze Zahlen und $c$ eine positive reelle Zahl, für die*

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a}$$

*erfüllt ist.*

*Man beweise, dass $c \geq 1$ gilt.*

*(Karl Czakler)*

*Lösung 1.* Folgende Gleichungen sind zur gegebenen Gleichung äquivalent:

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 + bc \\ 4a^2 + 4a + 1 &= 4b^2 + 4bc + 1 \\ (2a+1)^2 &= 4b^2 + 4bc + 1. \end{aligned}$$

Wir führen nun einen indirekten Beweis und nehmen $c < 1$ an. Dann gilt

$$(2b)^2 = 4b^2 < (2a+1)^2 = 4b^2 + 4bc + 1 < 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2.$$

Das ist aber ein Widerspruch, denn eine Quadratzahl kann nicht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegen. Daher muss $c \geq 1$ gelten und aus $a = b$ folgt $c = 1$, womit es tatsächlich Lösungen mit $c \geq 1$ gibt.

*(Karl Czakler)* □

*Lösung 2.* Wir formen die Gleichung mittels Äquivalenzumformungen nach $c$ um und erhalten

$$c = \frac{a^2 + a - b^2}{b} = \frac{a^2 + a}{b} - b.$$

Weil $c$ positiv und $b$ ganzzahlig ist, muss $b \leq a$ gelten, denn bereits für $b = a+1$ ist der Zähler $a^2+a-b^2$ negativ. Der Ausdruck $\frac{a^2+a}{b} - b$ zeigt, dass $c$ umso kleiner ist, je größer $b$ ist. Somit folgt

$$c \geq \frac{a^2 + a}{a} - a = 1.$$

*(Walther Janous)* □

*Lösung 2a.* Wie in Lösung 2 werden wir über eine Äquivalenz argumentieren. Wir haben

$$\frac{a+1}{b+c} = \frac{b}{a} \iff \frac{1 + 1/a}{b/a + c/a} = \frac{b}{a}.$$

Mit $\alpha = 1/a$, $\xi = b/a$ und $\eta = c/a$ müssen wir demnach zeigen, dass sich aus

$$\frac{1+\alpha}{\xi + \eta} = \xi$$

die Abschätzung $\eta \geq \alpha$ ergibt. Aus der Gleichung erhalten wir

$$\eta = \frac{1+\alpha}{\xi} - \xi \iff \eta = \left(\frac{1}{\xi} - \xi\right) + \frac{\alpha}{\xi}.$$

- Für $\xi \leq 1$ folgt unmittelbar
$$\eta \geq (1-1) + \frac{\alpha}{1} \iff \eta \geq \alpha.$$

- Dagegen ergibt $\xi > 1$, dass
$$\eta > 0 \iff \frac{\alpha}{\xi} > \xi - \frac{1}{\xi} \iff \alpha > \xi^2 - 1.$$
Deshalb muss
$$\frac{1}{a} > \frac{b^2}{a^2} - 1 \iff a > b^2 - a^2 \iff a^2 + a > b^2$$
gelten. Diese Ungleichung kann aber wegen
$$\xi > 1 \iff b^2 \geq (a+1)^2 \iff b^2 \geq a^2 + 2a + 1$$
niemals erfüllt sein.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 3.* Indem wir von beiden Seiten der Bedingung die Zahl 1 subtrahieren, erhalten wir die äquivalente Bedingung
$$\frac{a+1-b-c}{b+c} = \frac{b-a}{a}.$$
Für $d = b - a$ gilt demnach
$$\frac{1-c-d}{b+c} = \frac{d}{a} \iff (1-c)a - ad = d(b+c) \iff d(a+b+c) = (1-c)a.$$
Daraus ergeben sich

- $c < 1 \iff d > 0 \iff b > a \iff b \geq a+1$
und damit der Widerspruch
$$\frac{b}{a} > 1 > \frac{a+1}{a+1+c} \geq \frac{a+1}{b+c}$$
und
- $c = 1 \iff d = 0 \iff a = b$ und
- $c > 1 \iff d < 0 \iff b < a \iff a \geq b+1$ samt $c = \frac{a^2+a}{b} - b$.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 4.* Wir multiplizieren mit den Nennern und erhalten die äquivalente Gleichung
$$a(a+1) = b(b+c).$$
Somit ist $b^2 + bc$ ein Produkt von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Da natürlich
$$b^2 + bc > b^2 > b^2 - b = (b-1)b$$
gilt, muss $b^2 + bc$ mindestens $b(b+1)$ sein. Also gilt $b^2 + bc \geq b^2 + b$, woraus sofort $c \geq 1$ folgt wie gewünscht.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

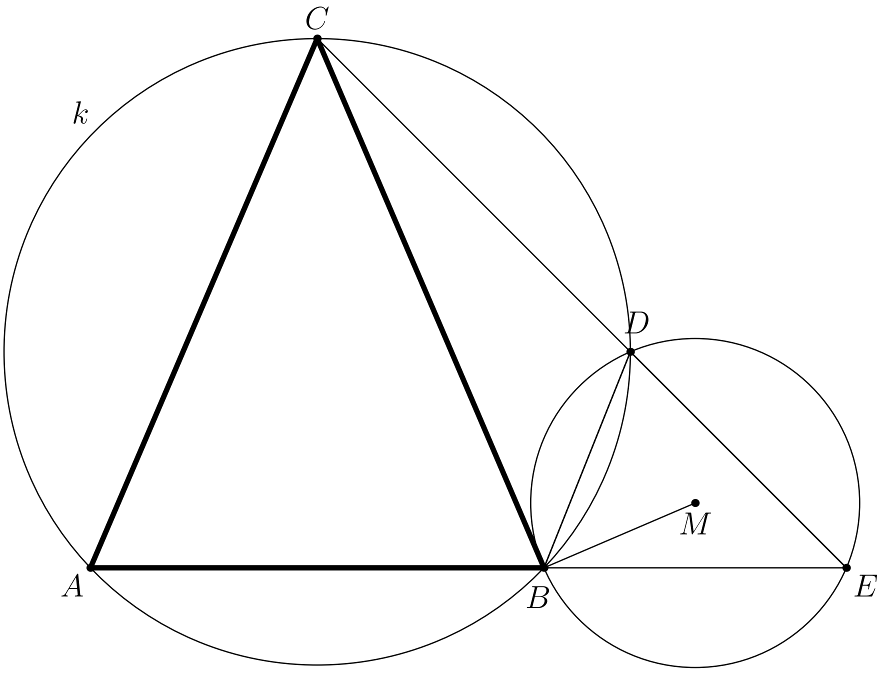


Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1

**Aufgabe 2.** *Sei $ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und dem Umkreis $k$. Der Punkt $D$ liegt auf dem kürzeren Kreisbogen von $k$ über $BC$ und ist von $B$ und $C$ verschieden. Der Schnittpunkt von $CD$ mit $AB$ sei $E$.*

*Man beweise, dass die Gerade durch $B$ und $C$ eine Tangente an den Umkreis des Dreiecks $BDE$ ist.*

*(Karl Czakler)*

*Lösung 1.* Es sei $M$ der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $BDE$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$. Da das Viereck $ABDC$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\sphericalangle BDE = \alpha$. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt $\sphericalangle BME = 2\alpha$ und daraus $\sphericalangle EBM = \sphericalangle MEB = 90° - \alpha$. Daher gilt

$$180° = \sphericalangle CBA + \sphericalangle MBC + \sphericalangle EBM = \alpha + \sphericalangle MBC + 90° - \alpha = \sphericalangle MBC + 90°,$$

also

$$\sphericalangle MBC = 90°$$

und alles ist gezeigt.

*(Karl Czakler)* □

*Lösung 2.* Es sei $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = \alpha$. Da das Viereck $ABDC$ ein Sehnenviereck ist, folgt $\sphericalangle CDB = 180° - \alpha$. Da auch $\sphericalangle EBC = 180° - \alpha$ und $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD$ gilt, sind die beiden Dreiecke $EBC$ und $BDC$ ähnlich und es gilt

$$CE : BC = BC : CD,$$

also

$$BC^2 = CE \cdot CD.$$

Daraus folgt mit dem Sekanten-Tangentensatz sofort die Behauptung.

*(Karl Czakler)* □

*Lösung 3.* Wir werden im Folgenden eine weitergehende Aussage beweisen. (Dafür werden wir Koordinaten benützen.)

Seien $ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $D$ ein Punkt der Dreiecksebene, der weder auf der Geraden $g$ durch $A$ und $B$ noch auf der Parallelen zu $g$ durch $C$ liegt. Die Gerade durch $C$ und $D$ schneide $g$ im Punkt $E$.

Wir zeigen nun: Die Gerade durch $B$ und $C$ ist genau dann Tangente an den Umkreis des Dreiecks $BDE$, wenn $D$ am Umkreis des Dreiecks $ABC$ liegt.

Weil das Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist, dürfen wir o. B. d. A. $A = (-a, b)$, $B = (a, b)$ und $C = (0, 1)$ setzen, wobei $a$ und $b$ reelle Zahlen mit $a > 0$, $b < 1$ und $a^2 + b^2 = 1$ sind, d.h. die Eckpunkte von $ABC$ liegen am Einheitskreis. Sei weiters $D = (d, e)$. Dann gelten $e \neq b$ und $e \neq 1$.

Wir bestimmen zuerst die Koordinaten des Punktes $E$, indem wir die Gerade $g$ mit der Geraden durch $C$ und $D$ schneiden, d.h., wir haben das Gleichungssystem

$$A + s \cdot (1, 0) = C + t \cdot (D - C) \iff (A - C) + s \cdot (1, 0) = t \cdot (D - C)$$

zu lösen. Aus seiner zweiten Komponente

$$b - 1 = t \cdot (e - 1)$$

ergibt sich $t = (b - 1)/(e - 1)$. Damit erhalten wir $E = \left(\frac{d(b-1)}{e-1}, b\right)$.

Zur Berechnung der Koordinaten von $M$, dem Mittelpunkt des Umkreises von $BED$, schneiden wir die Symmetralen der Seiten $BE$ und $BD$, d.h., wir müssen das Gleichungssystem

$$(B + E)/2 + s \cdot (0, 1) = (B + D)/2 + t \cdot (D - B)^\perp \iff (E - D)/2 + s \cdot (0, 1) = t \cdot (D - B)^\perp$$

lösen. Aus seiner ersten Komponente

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d(b-1)}{e-1} - d\right) = t(b - e) \iff \frac{d(b-e)}{2(e-1)} = t(b - e)$$

erhalten wir $t = \frac{d}{2(e-1)}$ und folglich

$$M = (B + D)/2 + \frac{d}{2(e-1)} \cdot (D - B)^\perp \iff M = (\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}) + \frac{d}{2(e-1)} \cdot (b - e, d - a).$$

Deshalb ist, wie eine kurze Rechnung zeigt,

$$M = \left(\frac{a(e-1) + d(b-1)}{2(e-1)}, \frac{(b+e)(e-1) + d^2 - ad}{2(e-1)}\right).$$

Somit haben wir

$$BC \perp MB \iff (B-C)\cdot(M-B) = 0 \iff (a, b-1)\cdot\left(\frac{a(e-1) - d(b-1)}{2(1-e)}, \frac{(b-e)(e-1) + ad - d^2}{2(1-e)}\right) = 0.$$

Es gilt also

$$\frac{a^2(e-1) + (b-1)((b-e)(e-1) - d^2}{2(1-e)} = 0 \iff (a^2 + b^2)(e-1) - b(d^2 + e^2 - 1) + d^2 + e^2 - e = 0 \iff$$

$$e - 1 - b(d^2 + e^2 - 1) + d^2 + e^2 - e = 0 \iff (1 - b)(d^2 + e^2 - 1) = 0 \iff d^2 + e^2 = 1,$$

d.h., auch der Punkt $D$ liegt am Einheitskreis und damit am Umkreis des Dreiecks $ABC$ und wir sind am Ende des Beweises.

**Bemerkung.** Mit der Vorgangsweise des obigen Beweises lässt sich eine noch weitergehende Aussage nachweisen, nämlich:

Seien $ABC$ ein beliebiges Dreieck und $D$ und $E$ wie zuvor festgelegt. Dann ist der geometrische Ort aller Punkte $D$, für die die Gerade durch $B$ und $C$ eine Tangente des Umkreises von $BDE$ ist, ein Kreis,

genauer:
Wenn die Dreieckseckpunkte $A = (-a, b)$, $B = (a, b)$ und $C = (c, d)$ am Einheitskreis liegen, dann liegen die Punkte $D$ am Kreis

$$\omega: \ (x-c)^2 + \left(y - \frac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2(b-d)}\right)^2 = \left(\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{2(b-d)}\right)^2.$$

Daraus folgt insbesondere, dass die Punkte $D$ genau dann am Umkreis des Dreiecks $ABC$ liegen, wenn $c = 0$ und damit $d = 1$ gelten, d.h. $ABC$ gleichschenklig mit $AC = BC$ ist.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 4.* Wenn wir die Gerade $AC$ in den Punkt $E$ zur Geraden $g$ parallelverschieben, dann stellen wir fest, dass wir das Sehnenviereck $ABDC$ zu $BE$, $g$, $ED$, $DB$ parallelverschoben haben. Das ist also ein (degeneriertes) Sehnenviereck, das heißt, $g$ ist die Tangente in $E$ an den Kreis $BED$. Damit ist dann aber auch die Gerade $BC$ eine Tangente, weil das die Spiegelung an einer Normalen auf $BC$ ist.

*(Theresia Eisenkölbl)* □

*Lösung 5.* Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $BC$ im Kreis $k$ folgt $\sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle CDB$, und da $D$ auf der Strecke $EC$ liegen muss, gilt $\sphericalangle BDE = 180° - \sphericalangle CDB$. Weil das Dreieck $ABC$ gleichschenklig ist, gilt auch $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BAC$. Insgesamt erhalten wir $\sphericalangle CBA = \sphericalangle BDE$. Wir verlängern nun die Strecke $CB$ über $B$ hinaus. Wegen der gemeinsamen Schenkelgeraden ist der Winkel zwischen dieser Verlängerung und der Sehne $BE$ natürlich ebenfalls $\sphericalangle CBA$. Damit schließen aber die Gerade $BC$ und die Sehne $BE$ genau den Peripheriewinkel $\sphericalangle BDE$ ein. Nach dem Tangentenwinkelsatz ist also $BC$ die Tangente an den Umkreis des Dreiecks $BDE$ durch $B$.

*(Josef Greilhuber)* □

**Aufgabe 3.** *Auf einer Tafel stehen die Zahlen* $1, 2, \ldots, 2020$ *und* $2021$. *Man führt folgende Operation aus:*
*Man wählt zwei Zahlen aus, schreibt den Betrag ihrer Differenz auf die Tafel und löscht die beiden gewählten Zahlen.*
*Das wiederholt man solange, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.*

(a) *Man zeige, dass* 2021 *als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.*

(b) *Man zeige, dass* 2020 *nicht als letzte Zahl auf der Tafel stehen kann.*

*(Karl Czakler)*

*Lösung.* (a) Wir wählen folgende 1010 Zahlenpaare aus:

$$(1, 2);\ (3, 4);\ \ldots;\ (2019, 2020).$$

Für jedes dieser Paare ist der Betrag ihrer Differenz 1, somit stehen 2021 und 1010 mal die Zahl 1 auf der Tafel. Im nächsten Schritt wählen wir die 505 Zahlenpaare $(1, 1)$ und bildet für jedes Paar die Differenz. Dann stehen 2021 und 505 mal die Zahl 0 auf der Tafel. Da $2021 - 0 = 2021$, erhalten wir nach 505 Schritten 2021 als letzte Zahl.
*Bemerkung:* Die Zahlenpaare sind relativ willkürlich gewählt, es sind zahlreiche Varianten möglich.

(b) Wir zeigen die allgemeinere Aussage, dass keine gerade Zahl als letzte Zahl möglich ist. Es gilt

$$a - b \equiv a + b \pmod 2,$$

somit bleibt die Parität der Summe der auf der Tafel stehenden Zahlen bei jeder Operation erhalten. Mit der Gaußschen Summenformel ist die Summe der zu Beginn auf der Tafel stehenden Zahlen

$$\frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \cdot 1011$$

eine ungerade Zahl, also muss auch die letzte Zahl eine ungerade Zahl sein. Daher ist insbesondere 2020 unmöglich.

*(Karl Czakler)* □

**Aufgabe 4.** *Man bestimme alle Tripel $(x, y, z)$ von positiven ganzen Zahlen, für die*

$$x \mid (y+1), \quad y \mid (z+1) \text{ und } z \mid (x+1)$$

*gelten.*

*(Walther Janous)*

*Antwort.* Es gibt zehn Tripel, die die drei Bedingungen erfüllen. Sie sind durch $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 5, 4)$ und ihre zyklischen Vertauschungen gegeben.

*Bemerkung.* Im Weiteren verwenden wir aus Gründen der leichteren Lesbarkeit die Schreibweise $a \mid b+c$ anstelle von $a \mid (b+c)$.

*Lösung 1.* Es müssen $y + 1 = ax$, $z + 1 = by$ und $x + 1 = cz$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelten.

Multiplikation dieser drei Gleichungen ergibt $abcxyz = (x+1)(y+1)(z+1)$, also $abcxyz > xyz$, d.h. $abc > 1$.

Deshalb muss zumindest einer der drei Faktoren $a$, $b$ oder $c$ größer als 1 sein. Weil die drei Teilbarkeitsbedingungen bei zyklischer Permuatation invariant bleiben, soll o.E.d.A. $a \geq 2$ gelten. Damit haben wir (wegen $b, c \geq 1$), dass

$$y + 1 \geq 2x,\ z + 1 \geq y \text{ und } x + 1 \geq z.$$

Addition dieser drei Ungleichungen ergibt $x + y + z + 3 \geq 2x + y + z$, d.h. $x \leq 3$.

Wir unterscheiden nun die drei möglichen Fälle.

- Für $x = 1$ ist $1 \mid y + 1$ erfüllt und es folgen $z \leq 1 + 1 = 2$ und damit $y \leq 2 + 1 = 3$.
  - Sei $y = 1$. Dann ist $1 \mid z + 1$ erfüllt und $z \mid 2$ ergibt $z = 1$ oder $z = 2$.
  - Mit $y = 2$ folgt aus $2 \mid z + 1$, dass $z = 1$. Damit ist auch $1 \mid x + 1$ erfüllt.
  - Für $y = 3$ impliziert $3 \mid z + 1$, dass $z = 2$, und $2 \mid x + 1$ ist erfüllt.
- Für $x = 2$ haben wir: $y + 1 \geq 4$, d.h. $y \geq 3$, und $2 + 1 \geq z$, d.h. $z \leq 3$, und $3 + 1 \geq y$, also $y = 3$ oder $y = 4$. Wegen $2 \mid y + 1$ ist nur $y = 3$ möglich. Mit $3 \mid z + 1$ folgt $z = 2$. Dann müsste aber $2 \mid 2 + 1$ gelten, ein offensichtlicher Widerspruch!
- Für $x = 3$ ergeben sich $y + 1 \geq 6$, d.h. $y \geq 5$, und $3 + 1 \geq z$, d.h. $z \leq 4$, und $4 + 1 \geq y$, also $y = 5$. Dies und $5 \mid z + 1$ führen auf $z = 4$. Damit sind alle drei Teilbarkeitsbedingungen erfüllt.

Zusammenfassung: Die Tripel $(x, y, z)$, für die die drei Teilbarkeitsrelationen erfüllt sind, sind

$$(1, 1, 1),\ (1, 1, 2),\ (1, 3, 2),\ (3, 5, 4)$$

und die zyklischen Permutationen davon.

*(Walther Janous)* □

*Lösung 2.* Es sei o.E.d.A. $x$ die kleinste der drei Zahlen (bzw. eine der kleinsten), also $x \le y$ und $x \le z$. Wegen $z \mid x+1$ muss $x \le z \le x+1$ gelten. Wir müssen also zwei Fälle betrachten:

- Fall 1. Sei $z = x$. Aus $z = x \mid x+1$ folgt $x = z = 1$ und $y \mid z+1 = 2$, also $y = 1$ oder $y = 2$. Wir erhalten die beiden Lösungstripel $(1,1,1)$ und $(1,2,1)$.
- Fall 2. Sei $z = x+1$. Dann müssen die beiden Bedingungen $x \mid y+1$ und $y \mid x+2$ erfüllt sein. Insbesondere gilt $x \le y+1$ und $y \le x+2$. Diese beiden Ungleichungen können zur Ungleichungskette $x-1 \le y \le x+2$ zusammengefügt werden. Wir können also die folgenden Fälle für $y$ untersuchen:
  - Fall 2a. Sei $0 < y = x$. Die Bedingungen lauten nun $x \mid x+1$ und $x \mid x+2$ und können gleichzeitig nur für $x = 1$ erfüllt sein. Wir erhalten das Lösungstripel $(1,1,2)$.
  - Fall 2b. $y = x+1$. Die beiden Bedingungen lauten $x \mid x+2$ und $x+1 \mid x+2$. Diese können nicht gleichzeitig erfüllt sein.
  - Fall 2c. $y = x+2$. Die Bedingung $y = x+2 \mid x+2 = z+1$ ist trivialerweise erfüllt. Die Bedingung $x \mid y+1 = x+3$ kann nur für $x \mid 3$ erfüllt sein. Überprüfen der Werte liefert, dass für $x = 1$ und $x = 3$ die Bedingung erfüllt ist. Wir erhalten die Lösungstripel $(1,3,2)$ und $(3,5,4)$.

Zusammenfassend: Für die Tripel $(1,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,3,2)$ und $(3,5,4)$ gelten die Bedingungen.

Da jede der drei Zahlen das Minimum sein kann, ist auch jede zyklische Vertauschung dieser Tripel eine Lösung.

*(Lukas Donner)* □

*Lösung 3.* Weil die angegebenen Bedingungen zyklisch sind, dürfen wir annehmen, dass $x \le y$ und $x \le z$ gelten. Die drei Teilbarkeitsaussagen sind genau dann erfüllt, wenn die drei Brüche

$$\frac{y+1}{x}, \quad \frac{z+1}{y} \quad \text{und} \quad \frac{x+1}{z}$$

ganzzahlig sind. Dann ist aber auch ihr Produkt

$$P = \frac{y+1}{x} \cdot \frac{z+1}{y} \cdot \frac{x+1}{z} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} \cdot \frac{z+1}{z} = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

ganzzahlig und zumindest 2 (weil die drei Faktoren größer als 1 sind). Außerdem haben wir

$$P \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^3,$$

womit sich

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \ge 2$$

ergibt. Diese Ungleichung ist für $x = 1$ erfüllt. Für $x \ge 2$ erhalten wegen

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^3 = 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} < 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2},$$

dass

$$2 < 1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \iff x^2 < 3x+4 \iff x^2 - 3x - 4 < 0 \iff (x+1)(x-4) < 0 \iff x < 4$$

zu gelten hat. Folglich bleiben drei Fälle zu überlegen.

- Fall 1. Für $x = 1$ folgt $z \mid 2$, also $z = 1$ oder $z = 2$.
    - Für $z = 1$ erhalten wir $y \mid 2$, also $y = 1$ oder $y = 2$, und die Lösungstripel $(1, 1, 1)$ bzw. $(1, 2, 1)$.
    - Für $z = 2$ ergeben sich $y \mid 3$, also $y = 1$ oder $y = 3$, und die Lösungstripel $(1, 1, 2)$ bzw. $(1, 3, 2)$.
- Fall 2. Für $x = 2$ folgt $z \mid 3$, also $z = 3$. Wegen $y \mid 4$ ergeben sich $y = 2$ oder $y = 4$. Daraus folgen aber die Widersprüche $2 \mid 3$ bzw. $2 \mid 5$.
- Fall 3. Für $x = 3$ haben wir $z \mid 4$, also $z = 4$. Mittels $y \mid 5$ ergeben sich $y = 5$ und das Lösungstripel $(3, 5, 4)$.

Wir haben damit gezeigt, dass die zehn Tripel, die die drei Bedingungen erfüllen, durch $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 5, 4)$ und ihre zyklischen Vertauschungen gegeben sind.

*(Walther Janous)* □