51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

2. April 2020

Aufgabe 1. *Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+a}\right)=a-x$$

mindestens eine ganzzahlige Lösung für x hat.

Für jedes solche a gebe man die entsprechenden Lösungen an.

(Richard Henner)

Antwort. Nur für $a=7$ gibt es ganzzahlige Lösungen, nämlich $x=2$ und $x=4$.

Lösung 1. Wegen

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+a}\right)=\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+2}{x+1}\cdots\frac{x+a+1}{x+a}=\frac{x+a+1}{x}=a-x$$

ist die Gleichung für $x\notin\{0,-1,\ldots,-a\}$ äquivalent zu $x^2+(1-a)x+a+1=0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $x=\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-6a-3}}{2}$.

Für $a\leq 6$ ist $a^2-6a=a\cdot(a-6)\leq 0$ und daher $a^2-6a-3<0$. Deshalb gibt es keine reellen Lösungen.

Für $a>9$ gilt $(a-4)^2<a^2-6a-3<(a-3)^2$ und die Wurzel kann daher nicht ganzzahlig sein.

Es kommen daher nur $a=7$, $a=8$ oder $a=9$ in Frage. Für $a=8$ oder $a=9$ gibt es keine ganzzahligen Lösungen. Für $a=7$ ergeben sich $x=2$ oder $x=4$.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Wir erhalten wie in Lösung 1 die Gleichung $x^2+(1-a)x+a+1=0$.

Wegen des Satzes von Vieta gilt für sie: Wenn eine ihrer Lösungen ganzzahlig ist, ist es auch die andere. Aus der Gleichung ergeben sich $x\neq 1$ und

$$a=\frac{x^2+x+1}{x-1}=x-1+\frac{3x}{x-1}.$$

Weil x und $x-1$ teilerfremd sind, muss $x-1$ ein Teiler von 3 sein, sonst wäre a nicht ganzzahlig. Wegen $x^2+x+1=\frac{(x+1)^2+x^2+1}{2}>0$ muss $x-1>0$, also $x\geq 2$, gelten, sonst wäre a nicht positiv. Es kommen daher nur $x=2$ oder $x=4$ in Frage. Sowohl für $x=2$ als auch für $x=4$ ist $a=7$.

(Richard Henner) □

Lösung 2a. Wir erhalten wie in Lösung 1 die Gleichung $x^2+(1-a)x+a+1=0$.

Wegen des Satzes von Vieta gilt für die beiden Lösungen x_1 und x_2 dieser quadratischen Gleichung

$$x_1+x_2=a-1\quad\text{und}\quad x_1\cdot x_2=a+1$$

und daher gilt

$$a=x_1\cdot x_2-1=x_1+x_2+1.$$

Wir bemerken, dass keine der beiden Zahlen x_1 oder x_2 den Wert 1 hat, da dies auf die unerfüllbare Gleichung $2 = 0$ führt. Somit ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$x_1 = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} = 1 + \frac{3}{x_2 - 1}.$$

Damit x_1 ganzzahlig ist, muss $x_2 - 1$ ein Teiler von 3 sein, also $x_2 \in \{-2, 0, 2, 4\}$. Für $x_2 = -2$ und $x_2 = 0$ folgt $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = -2$ und $a = -1$, was der Angabe $a > 0$ widerspricht. Für $x_2 = 2$ und $x_2 = 4$ folgt $x_1 = 4$ bzw. $x_1 = 2$ und in beiden Fällen $a = 7$.

(Lukas Andritsch) □

Lösung 2b. Wie in Lösung 2a erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & (a =)\ x_1 \cdot x_2 - 1 = x_1 + x_2 + 1 \\ \iff \quad & x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 3, \\ \iff \quad & (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 3, \end{aligned}$$

wobei wir o. B. d. A. $x_1 \leq x_2$ annehmen dürfen. Weil a eine positive ganze Zahl sein soll, müssen sowohl x_1 als auch x_2 positive ganze Zahlen sein. (Denn für $x_1 = 0$ oder $x_2 = 0$ ergäbe sich $a = x_1 \cdot x_2 - 1 = -1$, für $x_1 < 0 < x_2$ wäre $a = x_1 \cdot x_2 - 1 < -1$ und für $x_1 \leq x_2 < 0$ würde $a = x_1 + x_2 + 1 < 0$ gelten.) Mit $3 = 1 \cdot 3$ als einzig möglicher Zerlegung von 3 in zwei der Größe nach geordnete positive Faktoren erhalten wir schließlich

$$x_1 - 1 = 1 \text{ und } x_2 - 1 = 3,$$

also $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$, und damit $a = 7$.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wie in Lösung 1 erhält man

$$x = \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 6a - 3}}{2}.$$

Deshalb kann x nur dann ganzzahlig sein, wenn die Diskriminante das Quadrat einer (nichtnegativen) ganzen Zahl z ist, also

$$a^2 - 6a - 3 = z^2, \text{ d. h. } (a - 3)^2 - 12 = z^2$$

gilt. Nach Umstellen der Gleichung und Faktorisierung ergibt sich daraus

$$(a - 3 - z)(a - 3 + z) = 12.$$

Weil die zwei Faktoren restgleich modulo 2 sind und $2 \cdot 6 = (-6) \cdot (-2)$ die einzig möglichen Zerlegungen von 12 in zwei derartige Faktoren sind, erhalten wir wegen $a - 3 - z < a - 3 + z$ die zwei Möglichkeiten

- $a - 3 - z = 2$ und $a - 3 + z = 6$, also nach Addition $2a - 6 = 8$, d.h. $a = 7$, bzw.
- $a - 3 - z = -6$ und $a - 3 + z = -2$, also nach Addition $2a - 6 = -8$, d.h. $a = -1$,

wobei nur $a = 7$ sinnvoll ist. Dafür ergeben sich $x = 2$ oder $x = 4$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Die Menge M besteht aus allen 7-stelligen positiven ganzen Zahlen, die (in Dezimalschreibweise) jede der Ziffern 1, 3, 4, 6, 7, 8 und 9 genau einmal enthalten.*

(a) *Man bestimme die kleinste positive Differenz d von zwei Zahlen aus M.*

(b) *Wie viele Paare (x, y) mit x und y aus M gibt es, für die $x - y = d$ gilt?*

(Gerhard Kirchner)

Antwort. a) Die kleinstmögliche Differenz ist 9. b) Es gibt 480 derartige Zahlenpaare.

Lösung. a) Alle Zahlen in M haben die Ziffernsumme $1+3+4+6+7+8+9 = 38$, sind also kongruent zu 2 modulo 9. Die Differenz d ist daher durch 9 teilbar. Daraus folgt $d \geq 9$. Für $x = 1346798$ und $y = 1346789$ gilt tatsächlich $x - y = 9$, also ist $d = 9$ die kleinstmögliche Differenz.

b) Aus $x = y + 9$ ergeben sind folgende Möglichkeiten für die Einerziffern:

Einerziffer von y	1	3	4	6	7	8	9
Einerziffer von x	–	–	3	–	6	7	8

Durch den Übertrag muss die Zehnerziffer von x um 1 größer sein als die Zehnerziffer von y, ansonsten müssen die beiden Zahlen übereinstimmen. Das heißt, dass y auf 34, 67, 78 oder 89 endet und bei x diese beiden Ziffern vertauscht sind, x also auf 43, 76, 87 oder 98 endet. Daher gibt es 4 Möglichkeiten für die beiden letzten Ziffern von y und jeweils $5! = 120$ Möglichkeiten für die Ziffern davor. Also gibt es 480 solche Paare.

(Gerhard Kirchner, Gottfried Perz) □

Aufgabe 3. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB < AC$. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sei I. Die Streckensymmetrale der Seite BC schneide die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAC$ im Punkt S und die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle CBA$ im Punkt T.*

Man beweise, dass die Punkte C, I, S und T auf einem Kreis liegen.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Abbildung 1 zeigt eine mögliche Lage.[1] Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks mit α, β

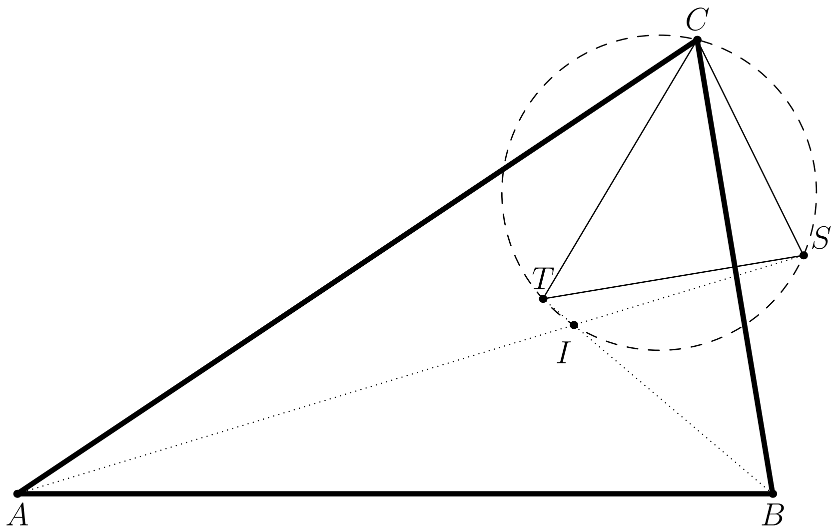

Abbildung 1: Aufgabe 3, Lösung 1

und γ. Dann gilt

$$\sphericalangle AIB = \sphericalangle SIT = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

[1] Wir zeigen, dass tatsächlich nur diese Lage auftreten kann. Wegen $AC > AB$ liegen die Punkte A und C in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Streckensymmetralen der Seite BC. Daher liegt auch die Strecke AS in einer anderen Halbebene bezüglich der Streckensymmetralen von BC als der Punkt C. Der Punkt I liegt auf dieser Strecke AS, da er auf der Winkelsymmetralen $\sphericalangle BAC = AS$ innerhalb des Dreiecks und der Punkt S mit dem Südpolsatz am Umkreis des Dreiecks und somit außerhalb des Dreiecks liegt. Daher liegen I und C in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Streckensymmetralen von BC und die angegebene Lage der Punkte ist die einzig mögliche.

Da der Punkt S mit dem Südpolsatz am Umkreis des Dreiecks ABC liegt, gilt mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle BAS = \frac{\alpha}{2}.$$

Da T auf der Streckensymmetralen der Seite BC liegt, gilt

$$\sphericalangle TCB = \sphericalangle CBT = \frac{\beta}{2},$$

und somit gilt

$$\sphericalangle TCS = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle SIT$ und $\sphericalangle TCS$ im Viereck $TISC$ ergänzen einander daher auf 180° und alles ist gezeigt.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks mit α, β und γ.

Da der Punkt S mit dem Südpolsatz am Umkreis des Dreiecks ABC liegt, folgt mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle BCS = \sphericalangle BAS = \frac{\alpha}{2}$$

und daher

$$\sphericalangle CST = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Weiters gilt

$$\sphericalangle BIC = 180° - \frac{\beta + \gamma}{2},$$

und daher

$$\sphericalangle CIT = 180° - \left(180° - \frac{\beta + \gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Wir haben daher

$$\sphericalangle CST = \sphericalangle CIT = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

und mit dem Peripheriewinkelsatz folgt die Behauptung.

(Karl Czakler) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Quadrupel (p, q, r, n) von Primzahlen p, q, r und positiven ganzen Zahlen n, für die*

$$p^2 = q^2 + r^n$$

erfüllt ist.

(Walther Janous)

Antwort. Es gibt zwei derartige Quadrupel (p, q, r, n), nämlich $(3, 2, 5, 1)$ und $(5, 3, 2, 4)$.

Lösung 1. Nach Umstellung der Gleichung und Faktorisierung der erhaltenen Differenz $p^2 - q^2$ haben wir

$$(p - q)(p + q) = r^n$$

zu betrachten und unterscheiden dafür zwei Fälle.

- Fall 1. $p - q = 1$, also $p = 3$ und $q = 2$. Damit ergeben sich $r^n = 5$, also $r = 5$ und $n = 1$, und das Lösungsquadrupel $(p, q, r, n) = (3, 2, 5, 1)$.

- Fall 2. $p-q>1$. Wegen $p+q>p-q$ muss $n\geq 2$ sein und $r \mid p-q$ und $r \mid p+q$ gelten. Daraus folgen $r \mid p-q+p+q=2p$ und $r \mid p+q-p+q=2q$.

  Angenommen, $r\neq 2$. Dann müssten $r=p$ und $r=q$ und folglich $r^n=0$ gelten.

  Deshalb sei im Weiteren $r=2$. Dann müssen

  $$p-q=2^a \text{ und } p+q=2^b \text{ mit } a+b=n \text{ und } 1\leq a<b$$

  und damit $p-q+p+q=2p=2^a+2^b$, d. h. $p=2^{a-1}(2^{b-a}+1)$, sein.

  Wegen $2^{b-a}+1\geq 2^1+1=3$ folgt daraus $a=1$, also $p=2^{b-1}+1$ und $p-q=2$ samt $q=2^{b-1}-1$. Folglich sind $q=2^{b-1}-1$, 2^{b-1} und $p=2^{b-1}+1$ drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, von denen eine durch 3 teilbar sein muss. Weil p und q Primzahlen sind und die zwischen ihnen stehende Zahl eine Potenz von 2 ist, erhalten wir $q=3$ und $p=5$. (Die Alternative $p=3$ würde $q=1$ nach sich ziehen.) Daraus ergeben sich unmittelbar $b=3$ samt $n=4$ und wir haben damit $(p,q,r,n)=(5,3,2,4)$ als zweites Lösungsquadrupel bestimmt.

(Walther Janous) □

Lösung 1a. Wie in Lösung 1 erhält man die Gleichung

$$r^n=(p-q)(p+q)$$

und für $p-q=1$ das erste Lösungsquadrupel $(p,q,r,n)=(3,2,5,1)$.

Für $p-q\geq 2$, also $p\geq 5$, müssen

$$p-q=r^a \text{ und } p+q=r^b \text{ mit } a+b=n \text{ und } 1\leq a<b$$

sein. Damit folgt $2p=(p-q)+(p+q)=r^a+r^b$, also $2p=r^a(1+r^{b-a})$. Deshalb ist r^a ein Teiler von $2p=2^1\cdot p^1$, es muss insbesondere $a=1$ sein, und wir haben $r\in\{2,p\}$ und $n=a+b\geq 1+2=3$.

- Für $r=p$ ergäbe sich der Widerspruch $p^2=q^2+r^n>p^n\geq p^3$.
- Für $r=2$ haben wir $p=q+2$ und erhalten für unsere Gleichung

  $$(q+2)^2=q^2+2^n \iff 4q+4=2^n \iff q=2^{n-2}-1$$

  und damit $p=2^{n-2}+1$.

  Es gelten aber $q\equiv(-1)^{n-2}-1 \pmod 3$ und $p\equiv(-1)^{n-2}+1 \pmod 3$. Wegen $(-1)^{n-2}\in\{-1,1\}$ ist genau eine der zwei Primzahlen p bzw. q durch 3 teilbar, also müssen $q=3$ und damit $p=5$ sein. Daraus erhält man das zweite Lösungsquadrupel $(p,q,r,n)=(5,3,2,4)$.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wegen $p^2=q^2+r^n>q^2$, also $p>q$, muss p ungerade sein. Weil damit auch q^2+r^n ungerade ist, muss genau eine der zwei Bedingungen $q=2$ oder $r=2$ erfüllt sein.

- Fall 1. Für $q=2$ lautet unsere Gleichung

  $$p^2=4+r^n.$$

  - Für $p=3$ erhält man $5=r^n$, also $r=5$ und $n=1$ und damit das Lösungsquadrupel $(p,q,r,n)=(3,2,5,1)$.

- ∘ Für $p \geq 5$ ergibt sich
$$p^2 \equiv 1 + r^n \pmod 3.$$
Wäre $r \neq 3$, so hätten wir
$$p^2 \equiv 1 + (\pm 1)^n \pmod 3,$$
also $p^2 \equiv 0 \pmod 3$ oder $p^2 \equiv 2 \pmod 3$. Es trifft aber keine dieser zwei Gleichungen zu – die erste nicht, weil $p \geq 5$, die zweite nicht, weil 2 kein quadratischer Rest modulo 3 ist.
Deshalb bleibt
$$p^2 = 4 + 3^n,$$
d. h. nach Umstellung der Gleichung und Faktorisierung
$$(p-2)(p+2) = 3^n$$
zu untersuchen.
Für $p \equiv 1 \pmod 3$ gilt $3 \nmid p-2$, während für $p \equiv 2 \pmod 3$ die Bedingung $3 \mid p+2$ gelten müsste.

- Fall 2. Für $r = 2$ lautet unsere Gleichung
$$p^2 = q^2 + 2^n.$$
Weil q ungerade ist, muss $p \geq 5$ sein und es folgt $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ und damit
$$1 \equiv q^2 + (-1)^n \pmod 3.$$
Für $q \neq 3$ ergäbe sich der Widerspruch $1 \equiv 1 + (-1)^n \pmod 3$. Mit $q = 3$ haben wir $1 \equiv (-1)^n \pmod 3$. Also muss n gerade sein, d. h. es muss $n = 2k$ gelten (mit k positiv und ganz), und die Gleichung lautet
$$p^2 = 3^2 + (2^k)^2.$$
Folglich ist $(3, 2^k, p)$ ein primitives pythagoreisches Tripel und wir erhalten mit den indischen Formeln
$$a^2 - b^2 = 3,\ 2ab = 2^k \text{ und } a^2 + b^2 = p,$$
wobei a und b teilerfremde ganze Zahlen sind. Die einzigen Quadratzahlen im Abstand 3 sind aber $a^2 = 4$ und $b^2 = 1$. Mit $a = 2$ und $b = 1$ ergeben sich schließlich $p = 5$, $2^k = 4$, also $k = 2$, d. h. $n = 4$, und damit das zweite Lösungsquadrupel $(p, q, r, n) = (5, 3, 2, 4)$.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Wir zeigen im Folgenden, dass die entsprechende Gleichung
$$p^{2^k} = q^{2^k} + r^n$$
genau dann lösbar ist, wenn $k = 1$ ist.

Dass sie für $k = 1$ lösbar ist, haben wir bereits in den Lösungen 1, 1a und 2 nachgewiesen. Es sei deshalb im Weiteren $k \geq 2$.

Für $k = 2$ lautet unsere Gleichung
$$p^4 = q^4 + r^n,$$
also
$$r^n = (p^2 - q^2)(p^2 + q^2).$$
Wegen der eindeutigen Primfaktorzerlegung müssen notwendigerweise die zwei Gleichungen
$$p^2 - q^2 = r^a$$
und
$$p^2 + q^2 = r^b$$
mit $a + b = n$ erfüllt sein. Die erste Gleichung hat zwei Lösungen.

- Für $p = 3$, $q = 2$ und $r = 5$ lässt sich aber $3^2 + 2^2 = 13$ nicht als Potenz von 5 darstellen.

- Für $p = 5$, $q = 3$ und $r = 2$ ist $5^2 + 3^2 = 34$ keine Potenz von 2.

Folglich gibt es kein Lösungsquadrupel.

Mit Induktion folgt, dass es für $k \geq 2$ niemals ein Lösungsquadrupel geben kann.

- Die Induktionsbasis $k = 2$ wurde zuvor behandelt.

- Wir nehmen an, dass die Aussage für eine natürliche Zahl $k \geq 2$ gilt.

- Daraus ergibt sich die Aussage für $k + 1$, denn

  $$r^n = p^{2^{k+1}} - q^{2^{k+1}} = \left(p^{2^k} - q^{2^k}\right)\left(p^{2^k} + q^{2^k}\right)$$

  impliziert, dass notwendigerweise eine Gleichung der Art

  $$p^{2^k} - q^{2^k} = r^m$$

  erfüllt zu sein hat, was aber nach Induktionsannahme nicht möglich ist.

Bemerkung. Ganz anders stellt sich die Situation dar, wenn man Gleichungen der Art

$$p^k = q^k + r^n$$

betrachtet, in denen k keine Potenz von 2 ist.

Beispielsweise haben die Gleichungen mit $p = 3$ und $q = 2$ für $k = 3$, $k = 5$ und $k = 17$ die Lösungen $r = 19$, $r = 211$ bzw. $r = 129009091$ mit jeweils $n = 1$.

(Walther Janous) □