50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

4. April 2019

Aufgabe 1. *Es seien x und y reelle Zahlen mit $(x+1)(y+2)=8$.*
Man beweise:

$$(xy-10)^2 \geq 64.$$

Man bestimme weiters alle Paare (x,y) reeller Zahlen, für die Gleichheit gilt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Die Ungleichung $(2x-y)^2 \geq 0$ ist äquivalent zur Ungleichung

$$(2x+y)^2 \geq 8xy$$

mit Gleichheit für $y=2x$. Aus $(x+1)(y+2)=8$ folgt $2x+y=6-xy$. Setzt man das in die obige Ungleichung ein, so erhält man

$$(6-xy)^2 \geq 8xy$$

und das ist äquivalent zu

$$(xy-10)^2 \geq 64.$$

Gleichheit gilt für $y=2x$, also für $(x+1)(2x+2)=8$. Daraus folgt $x=1$ oder $x=-3$. Für die Zahlenpaare $(1,2)$ und $(-3,-6)$ gilt also Gleichheit.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir berechnen y aus der Nebenbedingung und erhalten

$$y = \frac{8}{x+1} - 2,$$

wobei $x \neq -1$, und damit

$$xy - 10 = \frac{8x}{x+1} - 2x - 10 = \frac{8x+8}{x+1} - \frac{8}{x+1} - 2x - 10 = -2(\frac{4}{x+1} + x + 1).$$

Mit $t := x+1$, $t \neq 0$, ist somit

$$(t + \frac{4}{t})^2 \geq 16,$$

d.h.

$$|t + \frac{4}{t}| \geq 4$$

zu beweisen.

Für $t > 0$ ergibt die arithmetisch-geometrische Mittelungleichung

$$t + \frac{4}{t} \geq 2\sqrt{t\frac{4}{t}} = 4$$

mit Gleichheit genau für $t = \frac{4}{t}$, d.h. $t = 2$.

Für $t < 0$ ergibt sich die Ungleichung via $t \to -t$ aus dem eben Gezeigten samt Gleichheit genau für $t = -2$.

In der ursprünglichen Ungleichung tritt Gleichheit genau für $x = 1$, also $y = 2$, bzw. $x = -3$, also $y = -6$, ein.

(Walther Janous) □

Lösung 3. Aus $(x+1)(y+2) = 8$ folgt sofort $x \neq -1$ und $y \neq -2$. Daher kann man x aus der Nebenbedingung mit $x = \frac{6-y}{2+y}$ ausdrücken. Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

(a) $xy - 10 \geq 8$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{6y - y^2}{2+y} - 10 \geq 8.$$

Wir unterscheiden erneut zwei Fälle:

i. $y > -2$

Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$6y - y^2 - 20 - 10y \geq 16 + 8y,$$

also zu

$$0 \geq (y+6)^2.$$

Für $y > -2$ ist diese Ungleichung daher nicht erfüllt.

ii. $y < -2$

In diesem Fall ist die obige Ungleichung äquivalent zu

$$0 \leq (y+6)^2.$$

Die Ungleichung $xy - 10 \geq 8$ ist daher für alle $y < -2$ richtig.. Wir erhalten mit $y = -6$ und $x = -3$ auch einen ersten Gleichheitsfall.

(b) $xy - 10 \leq -8$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{6y - y^2}{2+y} - 10 \leq -8.$$

Wir unterscheiden erneut zwei Fälle:

i. $y > -2$

Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu

$$6y - y^2 - 20 - 10y \leq -16 - 8y,$$

also zu

$$0 \leq (y-2)^2.$$

Die Ungleichung $xy - 10 \leq -8$ ist daher für alle $y > -2$ richtig. Wir erhalten für $y = 2$ und $x = 1$ einen zweiten Gleichheitsfall.

ii. $y < -2$

Es folgt analog zu oben

$$0 \geq (y-2)^2$$

und die Ungleichung $xy - 10 \leq -8$ ist daher für alle $y < -2$ nicht erfüllt.

Zusammenfassend ist also $xy - 10 \geq 8$ für alle $y < -2$ und $xy - 10 \leq -8$ für alle $y > -2$ erfüllt. Daraus folgt unmitttelbar die Richtigkeit der gegebenen Ungleichung $(xy-10)^2 \geq 64$. Für die Zahlenpaare $(1, 2)$ und $(-3, -6)$ gilt Gleichheit.

(Karl Czakler) $\square$

Lösung 4. Es gilt klarerweise $x \neq -1$ und $y \neq -2$. Wir berechnen x aus der Nebenbedingung mit $x = \frac{6-y}{2+y}$ und erhalten

$$\Big(\frac{6y-y^2}{2+y} - 10\Big)^2 \geq 64$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$(-y^2 - 4y - 20)^2 \geq 64(2+y)^2.$$

Daraus folgt

$$y^4 + 8y^3 - 8y^2 - 96y + 144 \geq 0$$

also

$$(y-2)^2(y+6)^2 \geq 0.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.. Gleichheit gilt für die Zahlenpaare $(1, 2)$ und $(-3, -6)$

(Karl Czakler) □

Lösung 5. Die Nebenbedingung ist äquivalent zu $xy = 6 - 2x - y$. Setzt man dies in die zu beweisende Ungleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} (xy - 10)^2 &\geq 64 \\ \Leftrightarrow (-4 - 2x - y)^2 &\geq 64 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 16x + 8y + 4xy - 48 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ersetzt man wiederum xy durch $6 - 2x - y$, so erhält man

$$(2x+2)^2 + (y+2)^2 - 32 \geq 0. \tag{1}$$

Laut Nebenbedingung gilt (da $x \neq -1$), dass $y + 2 = \frac{8}{x+1}$, eingesetzt in (1) erhält man

$$4(x+1)^2 + \frac{64}{(x+1)^2} - 32 \geq 0.$$

Mittels Substitution $k = x + 1$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} &4k^4 - 32k^2 + 64 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &(k^2 - 4)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

womit die Ungleichung bewiesen ist. Gleichheit gilt für $k = \pm 2$, woraus durch Rücksubstitution die beiden Paare $(x, y) \in \{(-3, -6), (1, 2)\}$ folgen.

(Lukas Andritsch) □

Aufgabe 2. *Das konvexe Fünfeck $ABCDE$ besitzt einen Umkreis und es gilt $\overline{AB} = \overline{BD}$. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Die Geraden BC und DE schneiden einander im Punkt Q.*

Man beweise, dass die Gerade PQ parallel zur Diagonalen AD ist.

(Gottfried Perz)

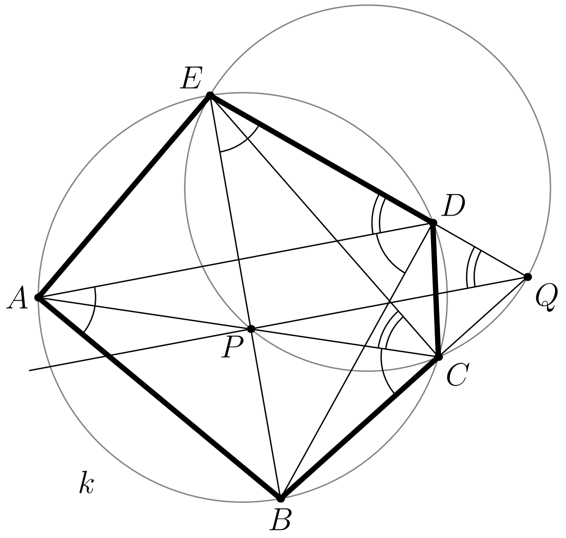

Abbildung 1: Aufgabe 2

Lösung. Abbildung 1 zeigt eine mögliche Lage der Punkte. Das Dreieck ABD ist gleichschenklig mit Basis AD. Daher gilt unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB.$$

Daraus folgt

$$\sphericalangle QCP = 180° - \sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle BED = 180° - \sphericalangle PEQ.$$

Somit ist das Viereck $PCQE$ ein Sehnenviereck und besitzt einen Umkreis, vgl. Abbildung 1. Daher gilt nach Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ECA = \sphericalangle ECP = \sphericalangle EQP.$$

Weil PQ und AD mit der Geraden EQ damit denselben (orientierten) Winkel einschließen, sind die Geraden PQ und AD parallel zu einander.

(Gottfried Perz) □

Aufgabe 3. *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl.*

Auf eine Tafel wird ein $n \times n$-Raster gezeichnet und jedes Feld mit einer der Zahlen -1 bzw. $+1$ beschriftet. Anschließend werden die n Zeilen- und auch die n Spaltensummen berechnet und die Summe S_n aller dieser $2n$ Summen bestimmt.

(a) Man zeige: Für keine ungerade Zahl n gibt es eine Beschriftung mit $S_n = 0$.

(b) Man zeige: Ist n eine gerade Zahl, so gibt es mindestens sechs verschiedene Beschriftungen mit $S_n = 0$.

(Walther Janous)

Lösung. (a) Weil in der Summe aller Zeilensummen jede Zahl des Rasters genau einmal vorkommt und dies ebenso für die Summe aller Spaltensummen gilt, ist S_n die doppelte Summe aller Zahlen auf dem $n \times n$-Raster.

Für ungerade Werte von n ist aber die Summe aller Zahlen ungerade, weil die Summanden ± 1 ungeradzahlig oft vorkommen.

(b) Für geradzahlige Werte von n gilt $S_n = 0$ genau dann, wenn die Summe aller Zahlen 0 ist, d.h., wenn die Summanden $+1$ und -1 gleich oft vorkommen. Die Anzahl verschiedener Beschriftungen ergibt sich aus folgendem Vorgehen:

Wähle von den insgesamt n^2 Feldern in beliebiger Weise genau die Hälfte und beschrifte sie mit $+1$. Die restliche Häfte der Felder wird mit -1 beschriftet.

- Insbesondere bedeutet dies im Fall $n = 2$: Wir benennen die vier Felder des Rasters mit a, b, c bzw. d. Dann gibt es für '+1-Beschriftungen' mit $S_2 = 0$ folgende Felder-Paare:

$$(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d) \text{ oder } (c, d),$$

also genau sechs verschiedene Beschriftungen.

- Für $n \geq 4$ verlängern wir ein 2×2-Raster nach oben und nach rechts, also etwa mit zwei $1\times(n-2)$-Blöcken nach oben und mit n Blöcken des Typs $(n-2)\times 1$ nach rechts. Wenn wir die $n+2$ Blöcke abwechselnd durchgängig mit $+1$ bzw. -1 beschriften, ergeben sich wegen $S_n = S_2 + \frac{n+2}{2}(1-1) = 0 + 0 = 0$ zumindest sechs Beschriftungen mit $S_n = 0$.

Bemerkung. Die Anzahl verschiedener Beschriftungen der geforderten Art beträgt $\binom{n^2}{n^2/2}$. Beispielsweise gibt es 12870 solcher Beschriftungen für $n = 4$ und bereits 100891344545564193334812497256 verschiedene Beschriftungen für $n = 10$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle natürlichen Zahlen n, die kleiner als 128^{97} sind und genau 2019 Teiler haben.*

(Richard Henner)

Antwort. Es gibt 4 Lösungen: $n = 2^{672} \cdot 3^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 5^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 7^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 11^2$.

Lösung 1. Seien p und q Primzahlen. Zahlen, die genau 2019 Teiler haben, sind entweder von der Form p^{2018} oder $p^{672} \cdot q^2$. Die Zahl 128^{97} kann dargestellt werden als

$$128^{97} = (2^7)^{97} = 2^{679}.$$

Die Zahl p^{2018} ist natürlich größer als 2^{679}, weil p mindestens 2 ist. Also muss gelten $n = p^{672} \cdot q^2 < 2^{679}$. Daher muss $p = 2$ und $q^2 < 2^7 = 128$ sein. Daher kommen für q nur die Primzahlen 3, 5, 7 oder 11 in Frage.

Es gibt also 4 Lösungen: $n = 2^{672} \cdot 3^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 5^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 7^2$ oder $n = 2^{672} \cdot 11^2$.

(Richard Henner) □

Lösung 2. Weil 2019 ungerade ist, muss n eine Quadratzahl sein. (Denn: Zu jedem Teiler t tritt auch die Zahl n/t als (Komplementär)Teiler auf. Genau bei Quadratzahlen n ist aber $\sqrt{n}$ sein eigener Komplementärteiler.)

Mit $n = a^2 < 128^{97} = 2^{7\cdot 97} = 2^{679} < 2^{680}$ haben wir $a < 2^{340}$.

- Fall 1. Wenn a eine reine Primzahlpotenz, also von der Form $a = p^\alpha$, ist, dann gilt $p^\alpha < 2^{340}$. Der Exponent α ist dann am größten, wenn p am kleinsten ist, also für $p = 2$. Dann ist $2^\alpha < 2^{340}$ samt $\alpha \leq 339$ und damit folgt $n = a^2 = p^{2\alpha} < 2^{680}$. Deshalb hat n weniger als 680 Teiler (die alle die Form p^j, $j = 0, 1, \ldots, 2\alpha$, haben).
- Fall 2. Die Zahl a besitzt zwei Primfaktoren, also $a = p^\alpha q^\beta$, p, q prim ($p \neq q$) mit $\alpha, \beta \geq 1$. Wegen $n = p^{2\alpha} q^{2\beta}$ haben wir für die Anzahl der Teiler von n deshalb $(2\alpha+1)(2\beta+1) = 2019 = 3 \cdot 673$, also o. B. d. A. $2\alpha+1 = 3$ und $2\beta+1 = 673$, d.h. $\alpha = 1$ und $\beta = 336$. Deshalb erhalten wir $a = p \cdot q^{336} < 2^{340}$ und damit wegen $3^{336} > 2^{340}$ sofort $q = 2$. Aus $a^2 = p^2 \cdot 2^{672} < 2^{679}$ ergibt sich $p^2 < 2^7 = 128$, also $p \leq 11$.

Folglich erhalten wir die vier Lösungen $n = p^2 \cdot 2^{672}$ mit $p \in \{3, 5, 7, 11\}$.

- Fall 3. Wenn die Zahl a mehr als zwei Primfaktoren besitzt, also $a = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma \cdot \ldots$ mit $p, q, r, \ldots$ prim und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \geq 1$ ist, dann ist die Teileranzahl von a^2 aber $(2\alpha+1)\cdot(2\beta+1)\cdot(2\gamma+1)\cdot\ldots$ im Widerspruch dazu, dass in der Primfaktorzerlegung von $2019 = 3 \cdot 673$ nur zwei Faktoren vorkommen, die größer als 1 sind.

(Walther Janous) □