46. Österreichische Mathematik Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene – Lösungen

26. März 2015

Aufgabe 1. (R. Henner) *Man bestimme alle Tripel* (a, b, c) *positiver ganzer Zahlen, für die die Bedingungen*

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(a, 20) &= b, && \text{(I)} \\ \operatorname{ggT}(b, 15) &= c \qquad \textit{und} && \text{(II)} \\ \operatorname{ggT}(a, c) &= 5 && \text{(III)} \end{aligned}$$

gelten.

Lösung 1. (R. Henner) Aus (III) folgt, dass a durch 5 teilbar ist.

- *Fall a) :* Sei a eine ungerade Zahl, also a ist ein Vielfaches von 5, aber nicht von 10. Dann folgt aus (I) : $b = 5$, und aus (II): $c = 5$.
- *Fall b) :* Sei a gerade, aber nicht durch 4 teilbar, also a ist ein Vielfaches von 10, aber nicht von 20. Dann folgt aus (I): $b = 10$, und aus (II): $c = 5$.
- *Fall c) :* Sei a durch 4 teilbar, also ein Vielfaches von 20. Dann folgt aus (I): $b = 20$, und aus (II): $c = 5$.

Also ist die Lösungsmenge $\{(20t, 20, 5), (20t-10, 10, 5), (10t-5, 5, 5) | t$ ist eine positive ganze Zahl$\}$. □

Lösung 2. (R. Henner) Aus (III) folgt, dass c durch 5 teilbar ist. Aus (II) folgt daraus, dass $c = 5$ oder $c = 15$ gilt. Für $c = 15$ folgt aus (II) : b ist ein Vielfaches von 15. Das ist aber ein Widerspruch zu (I), weil 15 kein Teiler von 20 ist. Also ist $c = 5$. Aus (II) folgt daher, dass b ein Vielfaches von 5 ist. Aus (I) folgt, dass b ein Teiler von 20 ist. Also ist b gleich 5, 10 oder 20.

- *Fall a) :* Sei $b = 5$. Aus (I) folgt dann, dass a durch 5, aber nicht durch 10 teilbar ist.
- *Fall b) :* Sei $b = 10$. Aus (I) folgt dann, dass a durch 10, aber nicht durch 20 teilbar ist.
- *Fall c) :* Sei $b = 20$. Aus (I) folgt dann, dass a durch 20 teilbar ist.

Also ist die Lösungsmenge $\{(20t, 20, 5), (20t-10, 10, 5), (10t-5, 5, 5) | t$ ist eine positive ganze Zahl$\}$. □

Lösung 3. (R. Henner) Aus (II) folgt, dass c ein Teiler von 15, also 1, 3, 5 oder 15, ist. Sei $c = 1$: Das widerspricht (III), weil $\operatorname{ggT}(1, a)$ nicht 5 sein kann. Sei $c = 3$: Dann ist nach (II) b ein Vielfaches von 3 und nach (I) b ein Teiler von 20. Das ist aber ein Widerspruch. Sei $c = 15$: Dann ist nach (II) b ein Vielfaches von 15 und nach (I) b ein Teiler von 20. Das ist aber ein Widerspruch. Also ist $c = 5$. Dann ist nach (II) b ein Vielfaches von 5 aber nicht von 15. Nach (I) ist b ein Teiler von 20. Also gilt, dass $b = 5$, 10 oder 20 ist.

- *Fall a) :* Sei $b = 5$: Dann ist (II) erfüllt. Aus (III) folgt, a muss ein Vielfaches von 5 sein. Aus (I) folgt, a muss ein Vielfaches von 5 sein, darf aber kein Vielfaches von 10 sein.
- *Fall b) :* Sei $b = 10$: Dann ist (II) erfüllt. Aus (III) folgt, a muss ein Vielfaches von 5 sein. Aus (I) folgt, a muss ein Vielfaches von 10 sein, darf aber kein Vielfaches von 20 sein.
- *Fall c) :* Sei $b = 20$: Dann ist (II) erfüllt. Aus (I) folgt, dass a ein Vielfaches von 20 sein muss, womit auch (III) erfüllt ist.

Also ist die Lösungsmenge $\{(20t, 20, 5), (20t-10, 10, 5), (10t-5, 5, 5) | t$ ist eine positive ganze Zahl$\}$. $\square$

Lösung 4. (W. Janous, G. Kirchner) Wir verwenden die Gleichungen (I) und (II) zur Elimination von b und c und erhalten:

$$\operatorname{ggT}(a, \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a, 20), 15)) = 5 \iff \operatorname{ggT}(a, a, 20, 15) = 5 \iff \operatorname{ggT}(a, 5) = 5 \iff 5 \mid a.$$

Weiters sind b und c aus (I) und (II) zu bestimmen. Aus (I) folgt $b \in \{5, 10, 20\}$ und zwar genauer: $b = 5$, wenn a ungerade ist, $b = 10$, wenn $b \equiv 2 \bmod 4$, $b = 20$, wenn $b \equiv 0 \bmod 4$. In allen drei Fällen folgt $c = 5$ aus (II). Wieder erhalten wir die oben angegebene Lösungsmenge. $\square$

Aufgabe 2. (K. Czakler) *Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 3$.*
Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$x(x+y-z), \qquad y(y+z-x) \qquad \textit{oder} \qquad z(z+x-y)$$

kleiner oder gleich 1 ist.

Lösung 1. (W. Janous) Angenommen, alle drei Zahlen sind größer als 1, also $x(x+y-z) > 1$, $y(y+z-x) > 1$ und $z(z+x-y) > 1$, d.h. $x+y-z > \frac{1}{x}$, $y+z-x > \frac{1}{y}$ und $z+x-y > \frac{1}{z}$. Addition dieser drei Ungleichungen ergibt $x+y+z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, also $3 > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Dies ist äquivalent zu $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} > 1$, was wegen $\frac{x+y+z}{3} = 1$ im Widerspruch zur harmonisch-arithmetischen Mittelungleichung $\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \frac{x+y+z}{3}$ steht. $\square$

Lösung 2. (W. Janous) Wir nehmen wieder an, dass alle drei Zahlen größer als 1 sind, also $x(x+y-z) > 1$, $y(y+z-x) > 1$ und $z(z+x-y) > 1$ gelten. Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung ergeben sich daraus $1 < \sqrt{x(x+y-z)} \leq \frac{x+(x+y-z)}{2}$ und zwei analoge Ungleichungen. Ihre Addition führt auf $3 < \frac{2x+2y+2z}{2}$, d.h. den Widerspruch $3 < 3$. $\square$

Lösung 3. (W. Janous) Es sollen wieder $x(x+y-z) > 1$, $y(y+z-x) > 1$ und $z(z+x-y) > 1$ gelten. Diese drei Ungleichungen lassen sich in der Form $x(3-2z) > 1$, $y(3-2x) > 1$ und $z(3-2y) > 1$ anschreiben. Aus der Bedingung $x+y+z = 3$ ergibt sich, dass nicht x, y und z kleiner als 1 sein können. Es soll o. E. d. A. $x \geq 1$ sein. Aus der zweiten Ungleichung $y(3-2x) > 1$ folgt damit $y > 1$, weil $3 - 2x \leq 1$ ist. Aus der dritten Ungleichung $z(3-2y) > 1$ folgt analog, dass $z > 1$ sein muss. Deshalb ergibt sich der Widerspruch $x + y + z > 3$. $\square$

Lösung 4. (W. Janous) Für $x+y \leq z$ oder $y+z \leq x$ oder $z+x \leq y$ ist sicher eine der drei betrachteten Zahlen kleiner oder gleich 0. Es sollen deshalb $x+y > z$ und $y+z > x$ und $z+x > y$ gelten. (Das bedeutet, dass x, y und z die Seitenlängen eines Dreiecks sind.) Wenn wir die drei betrachteten Zahlen multiplizieren, ergibt sich mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung

$$\sqrt[6]{x(x+y-z)y(y+z-x)z(z+x-y)} \leq \frac{x+(x+y-z)+y+(y+z-x)+z+(z+x-y)}{6},$$

das heißt $\sqrt[6]{x(x+y-z)y(y+z-x)z(z+x-y)} \leq \frac{x+y+z}{3}$. Daraus folgt unmittelbar $x(x+y-z)y(y+z-x)z(z+x-y) \leq 1$ und es muss zumindest eine der drei betrachteten Zahlen kleiner oder gleich 1 sein. $\square$

Lösung 5. (W. Janous) Weil die drei in Rede stehenden Terme zyklisch symmetrisch sind, dürfen wir o. B. d. A. annehmen, dass x eine größte der drei Zahlen x, y und z ist. Folglich gilt $x \geq \frac{x+y+z}{3} = 1$. Wir zeigen nun, dass die Zahl $a := y(y+z-x) = y(3-2x)$ stets ans Ziel führt.

- *Fall a) :* Für $\frac{3}{2} \leq x < 3$ ist a sicher nicht positiv, also kleiner oder gleich 1.
- *Fall b) :* Für $1 \leq x < \frac{3}{2}$ ist der Faktor $3 - 2x$ positiv. Daraus folgt $a \leq x(3-2x)$. Wir zeigen nun $x(3-2x) \leq 1$. Dies ist äquivalent zu $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$, d.h. $(2x-1)(x-1) \geq 0$

Damit sind wir am Ende des Beweises! □

Aufgabe 3. (T. Eisenkölbl) *Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. In jedem Spielzug wählt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihr arithmetisches Mittel. Dies geschieht so lange, bis nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht.*
Man bestimme die kleinste ganze Zahl, die man durch eine geeignete Folge von Spielzügen am Ende erreichen kann.

Lösung 1. (T. Eisenkölbl) Die Antwort lautet 2 für jedes n. Ganz sicher können wir keine Zahl kleiner als 2 erreichen, da 1 nur einmal vorkommt und sobald es verwendet wird, ein arithmetisches Mittel größer als 1 erzeugt.
Andererseits können wir mit Induktion zeigen, dass mit den erlaubten Spielzügen aus den Zahlen a, $a + 1$, ..., $a + k$ mit $k \geq 2$ die Zahl $a + 1$ erzeugt werden kann.
Für den Induktionsanfang mit $k = 2$ ersetzt man a und $a + 2$ durch $a + 1$, danach ersetzt man $a + 1$ und $a + 1$ durch ein $a + 1$.
Für den Induktionsschritt $k \to k + 1$ ersetzt man $a + 1$, ..., $a + k + 1$ durch $a + 2$ und dann a und $a + 2$ durch $a + 1$.
Mit $a = 1$ und $k = n - 1$ erhält man nun das gewünschte Resultat. □

Lösung 2. (G. Kirchner) Offensichtlich gilt zu jedem Zeitpunkt:

- Alle Zahlen auf der Tafel sind ≥ 1.
- Mindestens eine Zahl auf der Tafel ist größer als 1.

Insbesondere kann die letzte Zahl auf der Tafel nicht 1 (oder noch kleiner) sein. Wir behaupten, dass durch eine geeignete Folge von Spielzügen stets die Zahl 2 erreicht werden kann.
Als ersten Schritt bilden wir das Mittel der beiden Zahlen $n - 2$ und n. Somit stehen auf der Tafel die Zahlen 1, 2,..., $n - 3$, $n - 1$, $n - 1$.
Als zweiten Schritt bilden wir das Mittel der beiden Zahlen $n - 1$ und $n - 1$. Somit stehen auf der Tafel die Zahlen 1, 2,..., $n - 3$, $n - 1$.
Es genügt also zu zeigen, dass sich das Ergebnis 2 erreichen lässt, wenn die Zahlen 1, 2,..., $n - 3$, $n - 1$ auf der Tafel stehen. Dies zeigen wir durch vollständige Induktion über n. Beim Induktionsanfang $n = 3$ ist nichts zu zeigen, denn es steht schon die Zahl 2 allein an der Tafel.
Im Induktionsschritt nehmen wir an, es sei schon gezeigt, dass das Ergebnis 2 aus den Zahlen 1, 2,..., $n - 3$, $n - 1$ erreichbar ist. Wenn nun die Zahlen 1, 2,..., $n - 2$, n an der Tafel stehen, so bilden wir das arithmetische Mittel von $n - 2$ und n. Somit stehen die Zahlen 1, 2,..., $n - 3$, $n - 1$ auf der Tafel und die Behauptung (für $n + 1$ statt n) folgt aus der Induktionsannahme. □

Lösung 3. (R. Henner) Die kleinste natürliche Zahl, die am Ende auf der Tafel stehen kann, ist 2, weil weder 0 noch 1 als ganzzahliger Mittelwert von Zahlen herauskommen kann, die gleich 1 und größer als 1 sind.
Um zu zeigen, dass die Endzahl tatsächlich 2 sein kann, muss man einen Spielverlauf angeben, bei dem am Ende 2 an der Tafel steht. Das könnte so funktionieren: Man löscht zu Beginn die Zahlen n und $n - 2$ und schreibt den Mittelwert $n - 1$ an. Dadurch steht zweimal $n - 1$ an der Tafel. Dann löscht man diese beiden Zahlen und ersetzt sie durch ihren Mittelwert. Dann steht nur mehr einmal $n - 1$ an der Tafel. Für $n = 3$ sind wir fertig. Für $n > 3$ steht neben $n - 1$ noch eine oder stehen mehrere andere Zahlen an der Tafel, nämlich die Zahlen von 1 bis $n - 3$. Die Differenz der größten beiden Zahlen an der Tafel beträgt 2. Wenn wir diese beiden Zahlen löschen und durch den Mittelwert ersetzen, so steht an der Tafel die Liste der natürlichen Zahlen beginnend bei 1 und endend bei zwei Zahlen, die um 1 kleiner sind als die größten Zahlen beim vorhergehenden Zug, aber auch die Differenz 2 haben. Da vom Anfang an nur endlich viele Zahlen an der Tafel waren und bei jedem Zug die kleineren Zahlen unverändert bleiben und nur die größten beiden Zahlen um 1 verkleinert werden, muss nach endlich vielen Zügen der Zustand erreicht sein, dass nur mehr 1 und 3 an der Tafel stehen. Wenn wir die beiden Zahlen jetzt löschen und durch 2 ersetzen, sind wir fertig. □

Aufgabe 4. (W. Janous) *Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\sphericalangle ACB < 60°$. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt und den Umkreismittelpunkt mit I bzw. U. Der Umkreis des Dreiecks BIU schneidet den Schenkel BC ein zweites Mal im Punkt D.*

(a) Man beweise, dass die Geraden AC und DI parallel sind.

(b) Man beweise, dass die Geraden UD und IB aufeinander normal stehen.

Lösung 1. (K. Czakler) Es sei $\alpha = \sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle ACB$, G der Fußpunkt der Höhe durch den Eckpunkt C und F der Schnittpunkt von UD mit BI. Da $\gamma < 60°$ ist, gilt $\alpha > 60°$. Weiters gilt $\sphericalangle UBC = \sphericalangle UCB = \frac{\gamma}{2} < \sphericalangle IBC = \frac{\alpha}{2}$. Daraus folgt, dass I auf der Höhe durch C unterhalb von U liegt. Mit zweifacher Anwendung des Peripheriewinkelsatzes folgt

$$\gamma = \sphericalangle GUB = \sphericalangle IDB,$$

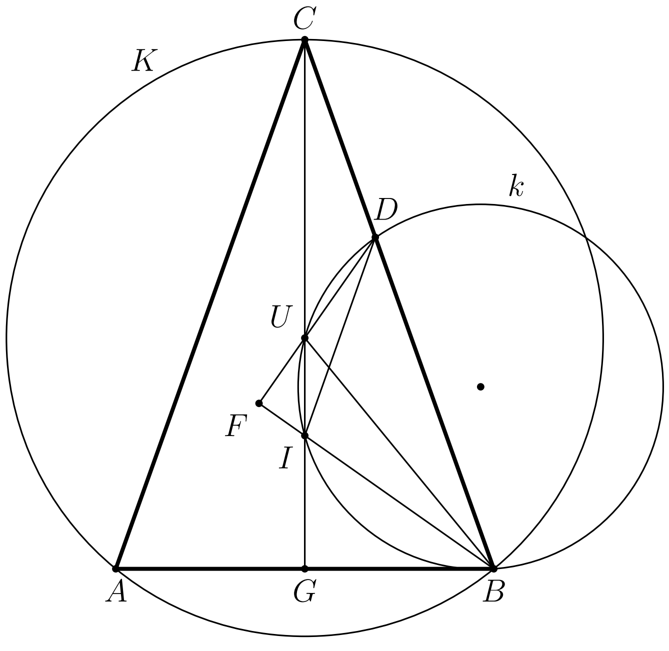
und daher ist AC parallel zu ID und Teil (a) ist gezeigt. Weiters gilt aufgrund des Peripheriewinkelsatzes

$$\sphericalangle UDB = \sphericalangle GIB = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Im Dreieck BFD gilt daher

$$\sphericalangle FBD + \sphericalangle BDF = \frac{\alpha}{2} + \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90°,$$

und daher stehen FD und FB aufeinander normal und somit ist auch Teil (b) gezeigt. □



Lösung 2. (R. Henner) Da $\gamma < 60°$ ist, gilt $\alpha > 60°$. Weiters gilt $\sphericalangle UBC = \sphericalangle UCB = \frac{\gamma}{2} < \sphericalangle IBC = \frac{\alpha}{2}$. Daraus folgt, dass I auf der Höhe durch C unterhalb von U liegt.
a) Sei K der Umkreis von ABC und k der Umkreis vom BIU. Aus dem Peripheriewinkelsatz im Kreis K folgt: $\sphericalangle BUC = 2\alpha$. Daher gilt: $\sphericalangle IUB = 180° - 2\alpha$ und wegen $\alpha = \beta$ gilt $\sphericalangle IUB = \gamma$. Aus dem Peripheriewinkelsatz im Kreis k folgt $\sphericalangle IDB = \gamma$, also gilt $ID \parallel AC$.
b) Aus dem Peripheriewinkelsatz im Kreis k folgt: $\sphericalangle IUD = 180° - \beta/2$, also $\sphericalangle DUC = \beta/2$, also $\sphericalangle FUI = \beta/2$. Wegen $\sphericalangle GIB = 90° - \beta/2$ gilt auch $\sphericalangle UIF = 90° - \beta/2$. Daraus folgt $\sphericalangle IFU = 90°$. □