54. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

24./25. Mai 2023

Aufgabe 1. *Sei α eine von 0 verschiedene reelle Zahl. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) + \alpha xy$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

(Walther Janous)

Antwort. Für $\alpha = -1$ ist die einzige Lösung die Funktion $f(x) = x$ für alle x. Für andere α gibt es keine Lösung.

Lösung 1. Wir setzen in der Funktionalgleichung $y = 0$ und erhalten mit $c = f(0)$ die Gleichung

$$f(f(x)) = f(x)(1+c). \tag{1}$$

Diese Gleichung verwenden wir mit $x + y$ statt x in der ursprünglichen Gleichung und erhalten

$$f(x+y)(1+c) = f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) + \alpha xy$$

und somit

$$f(x+y)c = f(x)f(y) + \alpha xy.$$

Wir wenden diese Gleichung nun auf zwei verschiedene Arten auf $f(x + y + z)$ an. Wir erhalten

$$c^2 f(x+y+z) = cf(x+y)f(z) + c\alpha(x+y)z = f(x)f(y)f(z) + \alpha xyf(z) + c\alpha(x+y)z$$

und analog durch Vertauschen der Rollen von x und z die Gleichung

$$c^2 f(x+y+z) = f(x)f(y)f(z) + \alpha zyf(x) + c\alpha(z+y)x.$$

Somit gilt

$$xyf(z) + cyz = zyf(x) + cyx$$

und mit $y = z = 1$ erhalten wir

$$xf(1) + c = f(x) + cx$$

und damit $f(x) = ax + c$. Einsetzen in die Gleichung (1) liefert

$$a(ax+c) + c = (ax+c)(1+c),$$

also $a^2 = a(1+c)$ und $ac + c = c(1+c)$.

Für $a = 0$ ist die Funktion konstant, das ist aber offensichtlich keine Lösung der ursprünglichen Gleichung, also gilt $a = 1 + c$ und $ac = c$.

Daraus folgt $c = 0$ und $a = 1$. Somit ist $f(x) = x$ für alle x. Das funktioniert aber genau für $\alpha = -1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Aus der Funktionalgleichung folgt unmittelbar, dass f nicht konstant sein kann. (Andernfalls müsste αxy konstant sein.) Sei im Weiteren $C = f(0)$. Wir setzen $y = 0$ in der Funktionalgleichung und erhalten

$$f(f(x)) = f(x)(1 + C).$$

Für z im Bild von f gilt also $f(z) = z(1 + C)$.

Setzt man hier $z = f(x + y)$, so ergibt sich $f(f(x + y)) = f(x + y)(1 + C)$, d.h. wegen der Funktionalgleichung

$$Cf(x + y) = f(x)f(y) + \alpha xy. \tag{2}$$

Wir setzen zunächst $x = 1$ und $y = -1$ und erhalten

$$C^2 = f(1)f(-1) - \alpha. \tag{3}$$

Mit $x = 1 + z$ und $y = -1$ in (2) erhalten wir

$$Cf(z) = f(z + 1)f(-1) - \alpha(z + 1).$$

Setzt man andererseits in (2) $x = z$ und $y = 1$, so ergibt sich

$$Cf(z + 1) = f(z)f(1) + \alpha z.$$

Wir multiplizieren die vorletzte Gleichung mit C und setzen für $Cf(z+1)$ die letzte Gleichung ein. Das führt auf

$$C^2 f(z) = f(z)f(1)f(-1) + \alpha zf(-1) - C\alpha(z + 1).$$

Durch Verwendung von (3) ergibt sich

$$C^2 f(z) = f(z)C^2 + \alpha f(z) + \alpha zf(-1) - C\alpha(z + 1).$$

Demnach gilt

$$\alpha(f(z) + z(f(-1) - C) - C) = 0.$$

Nach Division durch $\alpha \neq 0$ erkennt man, dass es sich bei $f(z)$ um eine Funktion der Form $az+b$ handelt. Wie ganz oben erwähnt, kann die Funktion nicht konstant sein, daher ist ihr Wertebereich ganz $\mathbb{R}$ und nach obiger Beobachtung muss es sich um die Funktion $f(z) = z(1+C)$ handeln. Setzt man hier $z = 0$, erhält man $C = 0$. Damit ist f die identische Funktion. Die Probe zeigt, dass dies nur für $\alpha = -1$ möglich ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Aus der Funktionalgleichung folgt unmittelbar, dass f nicht konstant sein kann. (Andernfalls müsste αxy konstant sein.) Für das Weitere bezeichnen wir unsere Funktionalgleichung mit (F).

Mit $y = 1$ lautet (F)

$$f(f(x + 1)) = f(x + 1) + f(x)f(1) + \alpha x. \tag{4}$$

Für $x = 1$ gilt deshalb

$$f(f(2)) = f(2) + f(1)^2 + \alpha. \tag{5}$$

und, wenn man x durch $x + 1$ ersetzt,

$$f(f(x + 2)) = f(x + 2) + f(x + 1)f(1) + \alpha(x + 1). \tag{6}$$

Für $y = 2$ ergibt (F)

$$f(f(x + 2)) = f(x + 2) + f(x)f(2) + 2\alpha x. \tag{7}$$

Daraus folgt mit $x = 0$, dass

$$f(f(2)) = f(2) + f(0)f(2).$$

Dies und (5) ergeben

$$f(0)f(2) = f(1)^2 + \alpha. \tag{8}$$

Wenn man in (F) noch $y = 0$ setzt und x durch $x + 1$ ersetzt, gilt

$$f(f(x+1)) = f(x+1) + f(x+1)f(0). \tag{9}$$

Mit (4) und (9) folgt

$$f(x+1)f(0) = f(x)f(1) + \alpha x \tag{10}$$

und mit (6) und (7)

$$f(x+1)f(1) = f(x)f(2) + \alpha x - \alpha. \tag{11}$$

Wenn wir (10) mit $f(2)$ und (11) mit $f(1)$ muliplizieren, erhalten wir

$$f(x+1)f(0)f(2) = f(x)f(1)f(2) + \alpha f(2)x$$

bzw.

$$f(x+1)f(1)^2 = f(x)f(1)f(2) + \alpha f(1)x - \alpha f(1).$$

Nach Subtraktion und unter Berücksichtigung von (8) ergibt sich somit

$$\alpha f(x+1) = \alpha(f(2) - f(1))x + \alpha f(1),$$

d.h. (wegen $\alpha \neq 0$)

$$f(x+1) = (f(2) - f(1))x + f(1).$$

Deshalb ist f eine lineare Funktion, also $f(x) = ax+b$ mit $a \neq 0$, weil wir zu Beginn konstante Lösungen ausgeschlossen haben. Die Probe führt auf

$$a^2x + a^2y + ab + b = ax + ay + b + a^2xy + abx + aby + b^2 + \alpha xy.$$

Für $y = 0$ ergibt sich

$$a^2x + ab = (a + ab)x + b^2,\ x \in \mathbb{R},$$

also (über Koeffizientenvergleich) $a^2 = a+ab$, d.h. $a = 1+b$, und $ab = b^2$. Folglich gelten $(1+b)b = b^2$, d.h. $b = 0$, samt $a = 1$. Für die deshalb einzig mögliche Lösungsfunktion $f(x) = x$ ergibt (F) abschließend noch, dass $(1 + \alpha)xy = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, also $\alpha = -1$ sein muss.

(Walther Janous) □

Aufgabe 2. *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O. Der Umkreis des Dreiecks AOC schneidet die Seite BC in den Punkten C und D und die Seite AB in den Punkten A und E.*

Man beweise, dass die Dreiecke BDE und AOC gleich lange Umkreisradien haben.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Der Zentriwinkelsatz im Umkreis des Dreiecks ABC impliziert

$$\sphericalangle COA = 2\sphericalangle CBA.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz im Umkreis des Dreiecks ADC folgt

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle COA = 2\sphericalangle CBA.$$

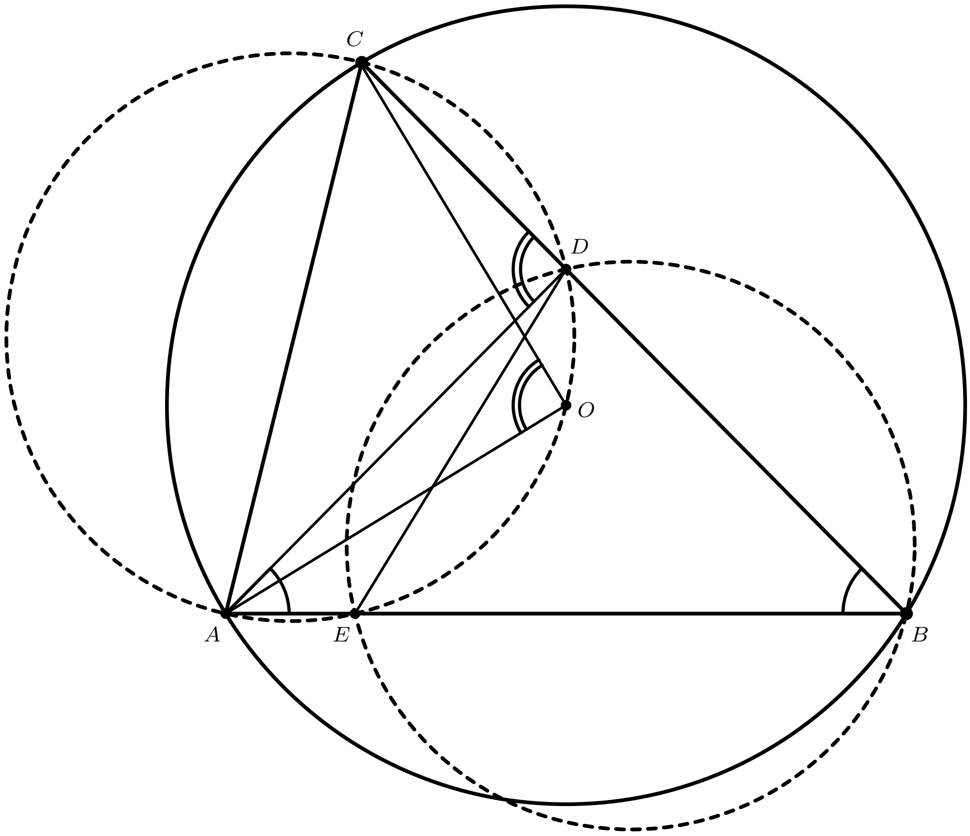
Der Winkel $\sphericalangle CDA$ ist ein Außenwinkel im Dreieck ABD, also gilt

$$\sphericalangle CBA + \sphericalangle BAD = \sphericalangle CDA = 2\sphericalangle CBA.$$

Es folgt

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBA.$$

Der Winkel $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAD$ ist ein Peripheriewinkel im Umkreis des Dreiecks AOC, über der Sehne ED. Der Winkel $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DBE$ ist ein Periphiewinkel im Umkreis des Dreiecks BDE, über derselben Sehne ED. Da Sehne und Peripheriewinkel in beiden Kreisen gleich sind, müssen die Kreise gleich lange Radien haben.



(Theresia Eisenkölbl, Josef Greilhuber) □

Lösung 2. Wir bezeichnen die Winkel des Dreiecks mit $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$ und $\gamma = \sphericalangle ACB$. Der Umkreis des Dreiecks AOC sei k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und der Umkreis des Dreiecks BDE sei k_2 mit dem Mittelpunkt M_2.

Die Dreiecke DM_2E und EM_1D sind gleichschenkelig. Um zu zeigen, dass die beiden Dreiecke kongruent und damit ihre Schenkellängen (also die gesuchten Umkreisradien) gleich lang sind, genügt es

$$\sphericalangle EM_1D = \sphericalangle DM_2E$$

zu zeigen.

Mit dem Zentriwinkelsatz folgt unmittelbar

$$\sphericalangle DM_2E = 2\beta.$$

Ebenfalls mit dem Peripheriewinkelsatz ($\sphericalangle OAC = 90^\circ - \beta$) folgt

$$\sphericalangle EDO = \sphericalangle OAE = \alpha - (90^\circ - \beta) = 90^\circ - \gamma.$$

Da das Viereck $AEDC$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BED = \gamma$. Daher gilt

$$\sphericalangle BED + \sphericalangle EDO = \gamma + 90^\circ - \gamma = 90^\circ$$

und es folgt, dass DO normal auf AB steht.

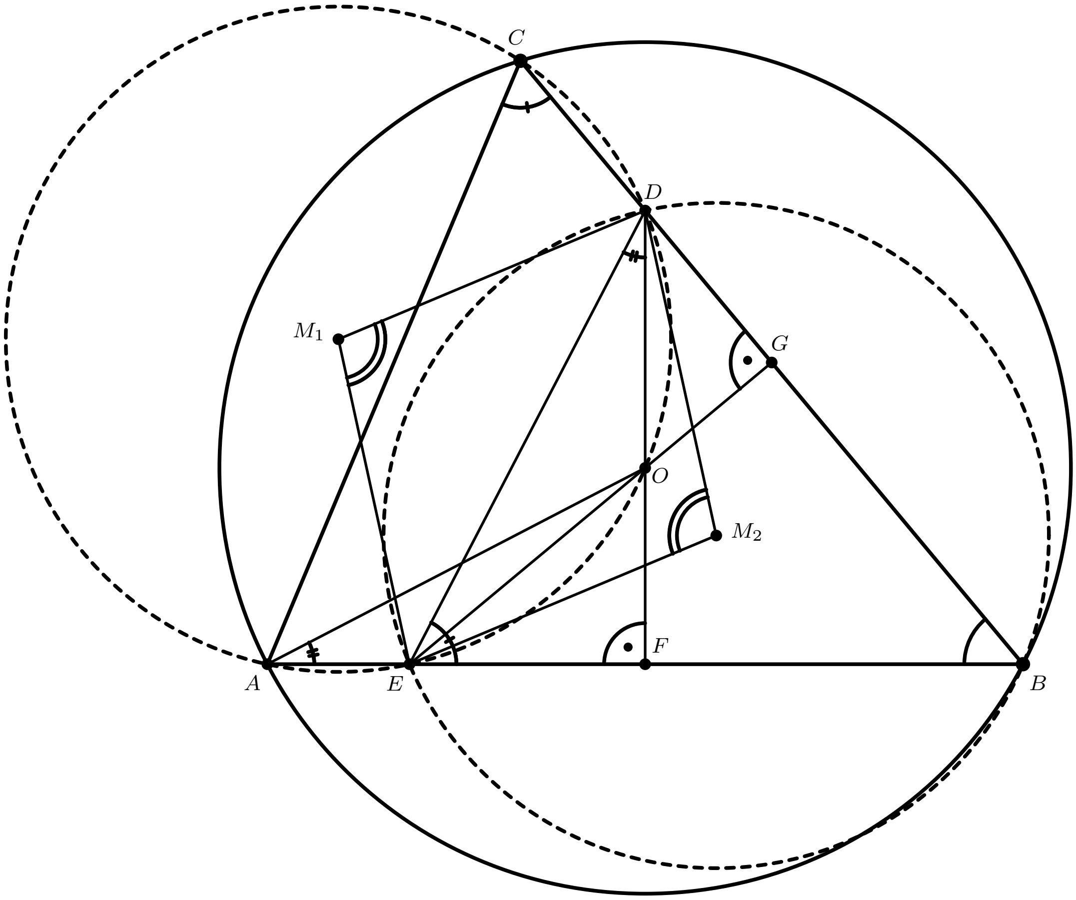
Analog zeigt man, dass EO normal auf BD steht. Der Punkt O ist daher der Höhenschnittpunkt des Dreiecks BDE und daher gilt

$$\sphericalangle DOE = 180^\circ - \beta.$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne DE folgt nun

$$\sphericalangle EM_1D = 2\beta$$

und alles ist gezeigt.



(Karl Czakler, Josef Greilhuber) □

Aufgabe 3. *Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd Strecken der Länge 1 in der euklidischen Ebene zeichnen. Alice beginnt und zeichnet die erste Strecke, danach müssen die Strecken jeweils vom Endpunkt der zuletzt gezeichneten Strecke ausgehen. Dabei ist es nicht erlaubt, eine Strecke so zu zeichnen, dass sie deckungsgleich mit der vorher gezeichneten Strecke ist. Wenn die neue Strecke mit einer der bisherigen Strecken mindestens einen Punkt – abgesehen vom Anfangspunkt der neuen Strecke – gemeinsam hat, dann hat man verloren.*

a) Man zeige, dass sowohl Alice als auch Bob ein Ende des Spieles erzwingen kann, wenn es egal ist, wer gewinnt.

b) Hat einer der beiden eine Gewinnstrategie?

(Michael Reitmeir)

Lösung 1. In allen Lösungen sei (falls das Spiel nicht vorher endet) A_n der Endpunkt der n-ten Strecke von Alice, und B_n der Endpunkt der n-ten Strecke von Bob. Weiters bezeichnen wir den Ausgangspunkt der ersten Strecke als B_0.

In dieser Lösung behandeln wir den Teil a) der Aufgabe.

Kann Alice das Ende des Spieles erzwingen, so kann das auch Bob, indem er die selbe Strategie anwendet und die erste Strecke von Alice ignoriert. Es genügt also zu zeigen, dass Alice das Ende erzwingen kann.

Bob muss seinen n-ten Endpunkt B_n immer so wählen, dass er auf einem Kreis mit Radius 1 um A_n liegt. Dieser Kreis sei k_n. Weiters sei l_n die Normale auf $B_{n-1}A_n$ durch A_n. Wir erkennen: Wählt Bob seinen Endpunkt so, dass die von ihm gezeichnete Strecke mit der vorherigen Strecke einen spitzen Winkel einschließt (also so, dass B_n auf der gleichen Seite von l_n wie die Strecke $\overline{B_{n-1}A_n}$ liegt), so kann Alice das Spiel in ihrem nächsten Zug sofort beenden.

Es sei h_n der Teil von k_n, der auf der anderen Seite von l_n als $\overline{B_{n-1}A_n}$ liegt (inklusive der Schnittpunkte von l_n und k_n). Im Folgenden müssen wir also nur den Fall betrachten, dass Bob den Punkt B_n auf dem Halbkreis h_n wählt.

Es sei B die Menge aller Punkte, deren Abstand zur ersten gezeichneten Strecke kleiner als 1 ist. Dabei besteht B aus einem 1×2-Rechteck und dem Inneren von zwei Halbkreisen. Bob wählt den Punkt B_1 auf h_1. Daraufhin kann Alice A_2 beliebig nahe an A_1 wählen. Sei r der Abstand zwischen A_2 und A_1. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: B_0, A_1, B_1 liegen nicht auf einer Gerade.

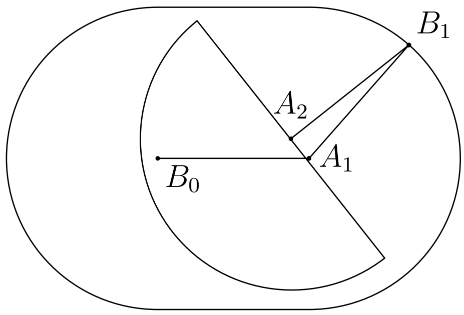


Abbildung 1: Aufgabe 3, Lösung 1

Würde Alice $A_2 = A_1$ wählen (was sie nach den Spielregeln nicht darf), so würde h_2 an einem Ende mit dem halbkreisförmigen Rand von B überlappen. Das andere Ende von h_2 müsste somit innerhalb des rechteckigen Teils von B liegen, womit dieses Ende einen positiven Abstand vom Rand von B hätte. Da Alice r jedoch beliebig klein wählen kann, kann sie (aus Stetigkeitsgründen) den Punkt A_2 leicht von A_1 weg in Richtung des im rechteckigen Teil von B liegenden Ende von h_2 verschieben, sodass h_2 vollständig innerhalb von B liegt. Damit liegt B_2 innerhalb von B, und hat somit einen Abstand kleiner als 1 zur ursprünglichen Strecke. Alice kann somit ihre nächste Strecke so wählen, dass sie die erste Strecke schneidet.

Fall 2: B_0, A_1, B_1 liegen auf einer Gerade.

In diesem Fall kann Alice A_2 nicht so wählen, dass h_2 vollständig in B liegt. Wählt Bob B_2 innerhalb von B, so kann Alice ihre nächste Strecke so wählen, dass sie die erste Strecke schneidet, und damit das Spiel beenden. Also nehmen wir an, Bob wählt B_2 auf h_2 außerhalb von B. Dann kann Alice den Punkt A_3 so wählen, dass er höchstens Abstand r von A_2 hat. Nach der Dreiecksungleichung ist A_3 höchstens $2r$ von A_1 entfernt. Wäre $r = 0$ (was nach den Spielregeln nicht erlaubt ist), so wäre $A_3 = A_1$. Damit würde (analog zum vorherigen Fall) h_3 an einem Ende mit dem halbkreisförmigen Rand von B überlappen und das andere Ende im rechteckigen Teil von B mit positiven Abstand zum Rand liegen. Da Alice $2r$ jedoch beliebig klein wählen kann, kann sie (wieder aus Stetigkeitsgründen) den Punkt A_3 leicht von A_1 weg in Richtung des im rechteckigen Teil von B liegenden Ende von h_3 verschieben, sodass h_3

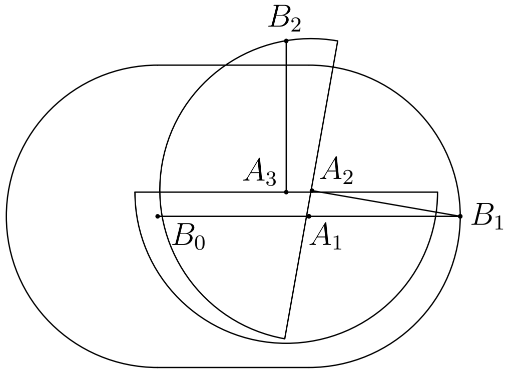


Abbildung 2: Aufgabe 3, Lösung 1

vollständig innerhalb von B liegt. Damit liegt B_3 innerhalb von B, und Alice kann ihre nächste Strecke so wählen, dass sie die erste Strecke schneidet.

(Michael Reitmeir) □

Lösung 2. In dieser Lösung behandeln wir den Teil a) der Aufgabe.

Es seien alle Bezeichnungen wie zuvor. Wieder genügt es zu zeigen, dass Alice ein Ende des Spiels erzwingen kann. Dafür nehmen wir an, dass Alice das Spiel nicht innerhalb von 66 Zügen beenden kann und führen diese Annahme auf einen Widerspruch.

Es sei ω der Kreis mit Mittelpunkt A_1 und Radius 2. Wir zeigen zuerst, dass Alice dafür sorgen kann, dass $B_1, B_2, \ldots, B_{65}$ alle innerhalb von ω liegen. Dafür wählt Alice als Endpunkt A_{n+1} ihrer neuen Strecke jeweils einen Punkt, der weniger als $\frac{1}{65}$ vom Endpunkt ihrer vorherigen Strecke A_n entfernt ist. Nach der Dreiecksungleichung ist B_n für $n \in \{1, 2, \ldots, 65\}$ weniger als $1 + n \cdot \frac{1}{65} \leq 2$ von A_1 entfernt, liegt also innerhalb des Kreises ω.

Nun seien $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{65}$ jeweils Kreise um $B_1, B_2, \ldots, B_{65}$ mit Radius 1. Weiters sei Ω ein Kreis um A_1 mit Radius 4. Da B_1 bis B_{65} innerhalb von ω liegen, liegen die Kreise ω_1 bis ω_{65} alle innerhalb von Ω. Läge B_n in einem Kreis ω_k mit $k \neq n$, so könnte Alice den Punkt A_{n+1} so wählen, dass die Strecke $\overline{B_n A_{n+1}}$ die Strecke $\overline{B_k A_{k+1}}$ schneidet. Damit überlappen sich Kreise mit den Mittelpunkten $B_1, B_2, \ldots, B_{65}$ und Radius $\frac{1}{2}$ paarweise sicher nicht. Da diese Kreise je einen Flächeninhalt von $\frac{\pi}{4}$ haben, nehmen sie insgesamt also eine Fläche von mehr als 16π ein. Da diese Kreise alle im Inneren von Ω liegen, ist dies aber ein Widerspruch, da Ω einen Flächeninhalt von 16π hat.

(Michael Reitmeir) □

Lösung 3. In dieser Lösung behandeln wir den Teil b) der Aufgabe.

Wir zeigen, dass beide Spieler immer jeweils einen Zug wählen können, bei dem sie nicht verlieren: Für die ersten beiden Züge ist das trivialerweise möglich. Nehmen wir also an, es wurden bisher zumindest zwei Strecken gezeichnet. Sei s die zuletzt gezeichnete Strecke, t die unmittelbar davor gezeichnete Strecke, und sei S die Vereinigung aller Strecken, die vor s und t gezeichnet wurden. Es sei r der kleinste Abstand zwischen den Punkten von S und s. Da s und S laut den Spielregeln disjunkte Streckenzüge sind, ist $r > 0$.

Sei nun B die Menge aller Punkte x, die von s weniger als $\frac{r}{2}$ entfernt sind. B enthält sicher keinen Punkt der Menge S. Die einzigen gezeichneten Strecken, die Punkte in B haben, sind also s und t. Indem wir s zu einer Geraden verlängern, können wir die euklidische Ebene in zwei (offene) Halbebenen teilen. Eine dieser Halbebenen enthält sicher keinen Punkt von t. Wir wählen diese Halbebene und schneiden sie mit B. In dieser Hälfte von B können wir sicher eine Strecke der Länge 1 finden, die beim Endpunkt von s beginnt und weder die Strecke t noch eine der anderen Strecken schneidet.

(Thomas Speckhofer) □

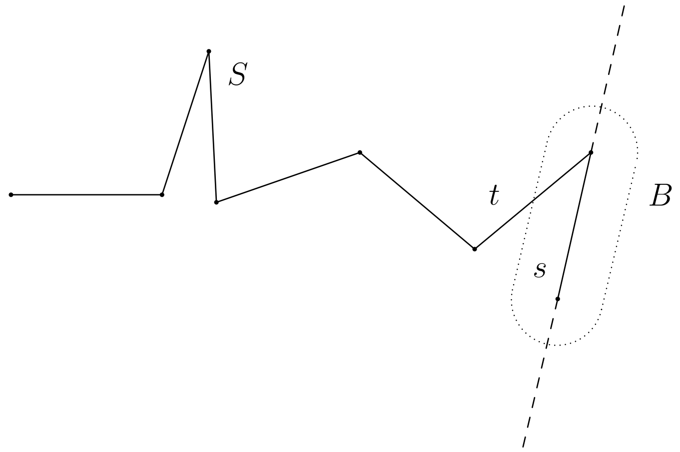


Abbildung 3: Aufgabe 3, Lösung 3

Lösung 4. In dieser Aufgabe behandeln wir Teil b).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $B_0 = (0, 0)$ und $A_1 = (1, 0)$. Wir geben für die folgenden Züge eine Strategie für Alice an, mit der sie nie verliert. Mit der analogen Strategie kann dann auch Bob dafür sorgen, dass er nie verliert.

Alice kann immer $A_{n+1} = B_n + (1, 0)$ wählen. Für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ sei $x(P)$ die x-Koordinate und $y(P)$ die y-Koordinate des Punkts. In dieser Schreibweise lautet die Strategie von Alice $x(A_{n+1}) = x(B_n) + 1$ und $y(A_{n+1}) = y(B_n)$. Da Bob seine Endpunkte B_n so wählen muss, dass der Abstand zwischen A_n und B_n genau 1 ist, er dabei aber nicht die vorher gezeichnete Strecke überlappen darf, ist $x(B_n) \in]x(A_n) - 1, x(A_n) + 1]$. Damit gilt

$$x(A_{n+1}) - 1 = x(B_n) > x(A_n) - 1 = x(B_{n-1}),$$

also $x(A_{n+1}) > x(A_n)$ und $x(B_n) > x(B_{n-1})$ für alle n, und damit induktiv $x(A_n) > x(A_k)$ und $x(B_n) > x(B_k)$ für $n > k$. Alice kann also nicht dadurch verlieren, dass sie mit einer ihrer Strecken $\overline{B_n A_{n+1}}$ eine andere ihrer Strecken $\overline{B_k A_{k+1}}$ für $k > n$ schneidet, denn dafür müsste bereits B_n auf $\overline{B_k A_{k+1}}$ liegen, womit Bob das Spiel bereits einen Zug früher verloren hätte.

Es bleibt noch zu zeigen, dass Alice mit dieser Strategie nie mit einer ihrer Strecken eine von Bob zuvor gezeichnete Strecke schneidet. Angenommen, das Spiel endet auf diese Weise nach Zeichnen der Strecke $\overline{B_n A_{n+1}}$, da diese $\overline{A_k B_k}$ mit $n > k$ schneidet. Wegen $x(B_n) > x(B_k)$ muss dafür $x(A_k) \geq x(B_n)$ sein. Außerdem müssen A_k und B_k auf verschiedenen Seiten der Gerade $B_n A_{n+1}$ liegen. O.B.d.A sei also $y(B_k) > y(B_n) = y(A_{n+1}) > y(A_k)$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: A_n und A_k liegen auf der gleichen Seite der Gerade $B_n A_{n+1}$.
Dann schneiden sich wegen $x(A_n) > x(A_k) \geq x(B_n)$ die Strecken $\overline{A_n B_n}$ und $\overline{B_{k-1} A_k}$.

Fall 2: A_n und A_k liegen auf verschiedenen Seiten der Gerade $B_n A_{n+1}$.
Dann gilt $y(A_n) > y(B_n)$. Es sei A der Schnittpunkt von $\overline{B_n A_{n+1}}$ und $\overline{A_k B_k}$. Wir haben $x(B_k) < x(B_n) \leq x(A) \leq x(A_k) < x(A_n)$. Außerdem ist $y(B_k) > y(B_n) = y(A)$ sowie $y(A_n) > y(B_n)$. Damit müssen sich die Strecken $\overline{B_k A}$ und $\overline{A_n B_n}$ in einem Punkt P mit $x(B_n) \leq x(P) \leq x(A)$ und $y(B_n) = y(A) \leq y(P) < \min(y(B_k), y(A_n))$ schneiden. Das heißt $\overline{A_k B_k}$ und $\overline{A_n B_n}$ schneiden sich.

In beiden Fällen schneiden sich also schon früher gezeichnete Strecken, was einen Widerspruch zu Annahme darstellt, dass das Spiel nach A_{n+1} endet. Also kann Alice mit dieser Strategie nicht verlieren. □

(Michael Reitmeir) □

Aufgabe 4. *Auf einer Tafel stehen die* 2023 *Zahlen*

$$2023, 2023, \ldots, 2023.$$

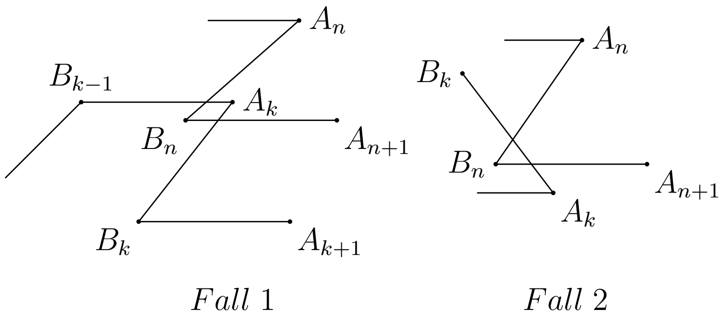


Abbildung 4: Aufgabe 3, Lösung 4

Die Zahlen auf der Tafel werden durch eine Abfolge von Zügen verändert. In jedem Zug wählt man zwei beliebige Zahlen, die auf der Tafel stehen, – wir nennen sie x und y – löscht sie und ersetzt sie durch die Zahl $\frac{x+y}{4}$. Solche Züge werden solange ausgeführt, bis nur noch eine Zahl auf der Tafel steht.

Man beweise, dass diese Zahl immer größer als 1 ist.

(Walther Janous)

Lösung 1. Der Ausdruck $\frac{x+y}{4}$ erinnert an das arithmetische Mittel. Nach der arithmetisch-harmonischen Ungleichung gilt

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}},$$

d.h. aber

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{1}{(x+y)/4}.$$

Diese Abschätzung legt eine Argumentation über die Kehrwerte der auftretenden Zahlen nahe, denn die Summe der Kehrwerte von zwei Zahlen ist zumindest so groß wie der Kehrwert der sie ersetzenden Zahl. Sie bleibt genau dann gleich, wenn die zwei gewählten Zahlen gleich sind, andernfalls ist sie größer. Am Beginn beträgt die Summe aller Kehrwerte

$$\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}+\ldots+\frac{1}{2023}=\frac{2023}{2023}=1.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. Denn zu Beginn gibt es ungerade viele Zahlen 2023, sodass nicht alle Zahlen 2023 in Paaren gleicher Zahlen verwendet werden können.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir zeigen mit Induktion über n, dass für n Zahlen $a, a, a, \ldots$ das Endergebnis mindestens a/n ist.

Für $n = 1$ ist das natürlich richtig.

Die Behauptung sei jetzt richtig für alle Anzahlen $k < n$ für ein festes n. Wir wollen daraus schließen, dass sie auch für n richtig ist.

Im angegebenen Prozess gibt es einen Moment, in dem nur mehr zwei Zahlen auf der Tafel stehen, die jeweils aus k und ℓ der Startzahlen a hervorgegangen sind mit $k + \ell = n$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt also, dass die beiden Zahlen größer als a/k bzw. a/ℓ sind.

Es bleibt also nur mehr zu zeigen, dass

$$\frac{a/k + a/\ell}{4} \geq \frac{a}{k+\ell}$$

gilt.

Das ist aber äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
&& \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{\ell}\right)(k+\ell) &\geq 4 \\
\Leftrightarrow && 1+1+\frac{\ell}{k}+\frac{k}{\ell} &\geq 4 \\
\Leftrightarrow && \frac{\ell}{k}+\frac{k}{\ell} &\geq 2.
\end{aligned}
$$

Das ist aber die bekannte Ungleichung $x+\frac{1}{x}\geq 2$, womit alles bewiesen ist.

Insbesondere gilt Gleichheit nur für $k=\ell$ in jedem Schritt, also, wenn n eine Zweierpotenz ist. Somit kann für 2023 Gleichheit nicht eintreten.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir markieren die Reihenfolge, in der Zahlen miteinander kombiniert werden, als Baumstruktur, siehe Abbildung 5. (Da alle Ausgangszahlen gleich sind, können wir sie dabei auf jeden Fall so umsortieren, dass keine Kreuzungen entstehen.)

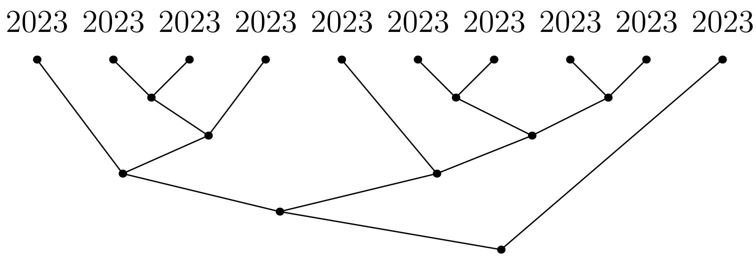


Abbildung 5: Aufgabe 4, Lösung 3

Wieviel jede dieser Zahlen am Ende noch zur „Summe“ beiträgt, hängt von der Anzahl der Teilstrecken von der Wurzel bis zur Zahl ab. In der Abbildung steckt die linkeste Zahl zum Beispiel noch zu $1/4^3$ im Endergebnis, die zweite zu $1/4^5$, ..., und die rechteste Zahl zu $1/4$.

Deswegen ändern wir jetzt noch die Höhen der Zahlen am Baum so, dass man an der Höhe ablesen kann, wie weit eine Zahl von der Wurzel entfernt ist, siehe Abbildung 6.

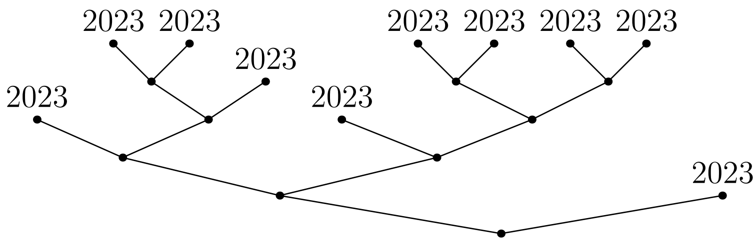


Abbildung 6: Aufgabe 4, Lösung 3

Umgekehrt kann man aus jedem Baum, der 2023 Blätter hat und sich bei jeder Verzweigung in genau zwei Zweige aufteilt, eine Reihenfolge ableiten, in der die Zahlen zusammengefügt werden.

Behauptung: In einem Baum, in dem das Ergebnis unten möglichst klein ist, sind alle Blätter auf derselben Höhe oder auf höchstens zwei aufeinanderfolgenden Höhen (d.h. man kann so einen Baum konstruieren, indem man immer eines der Blätter mit der kürzesten Entfernung zur Wurzel weiter aufspaltet).

Beweis der Behauptung: Wir betrachten einen Baum mit möglichst kleinem Ergebnis. Nehmen wir an, es gäbe darin Blätter, deren Höhe sich um mindestens 2 unterscheidet. Die höchste Höhe hat sich dabei sicher durch das Aufspalten eines Blattes auf der zweithöchsten Ebene in zwei Blätter ergeben. Wenn wir nun diese beiden Blätter abschneiden und stattdessen eines der Blätter mit der niedrigsten

Höhe aufspalten, dann sinkt die Gesamtsumme. (Wenn ein Blatt auf Höhe h ersetzt wird durch zwei Blätter auf Höhe $h+1$, so sinkt das Endergebnis um $1/4^h - 2 \cdot 1/4^{h+1} = 2/4^{h+1}$, d.h. je höher im Baum, umso weniger sinkt das Ergebnis.)

Wir ersetzen 2023 durch ein allgemeines n. Sei $n = 2^k + r$ mit passenden nicht-negativen ganzen Zahlen k und r, wobei $r < 2^k$. Dann sind in einem Baum, der ein möglichst kleines Ergebnis hat, $2^k - r$ Blätter auf Höhe k und $2r$ Blätter auf Höhe $k+1$.

Die Gesamtsumme beträgt

$$\left((2^k - r) \cdot \frac{1}{4^k} + 2r \cdot \frac{1}{4^{k+1}}\right) \cdot (2^k + r) = \frac{(2^k - r + \frac{r}{2}) \cdot (2^k + r)}{4^k}.$$

Für den Zähler gilt

$$(2^k - r + \frac{r}{2}) \cdot (2^k + r) = (2^k - \frac{r}{2}) \cdot (2^k + r) = 4^k + 2^k \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2} = 4^k + \frac{r}{2} \cdot (2^k - r),$$

was wegen $2^k - r \geq 0$ sicher größer oder gleich als der Nenner 4^k ist. Damit ist die Zahl am Ende größer oder gleich 1, mit Gleichheit genau für $r = 0$.

(Birgit Vera Schmidt) □

Bemerkung. Basierend auf der vorigen Lösung, die zeigt, wie der Baum im kleinstmöglichen Fall eindeutig (bis auf links-rechts-Vertauschungen) aussehen muss, kann man nun auch zeigen, dass eine Greedy-Lösung der Art „ich wähle immer die zwei größten auf der Tafel verbliebenen Zahlen" tatsächlich zum kleinstmöglichen Wert führt.

Dazu zeigen wir, dass es möglich ist, mit einer Reihe von legalen Greedy-Schritten demselben Baum zu folgen.

Wir nehmen an, dass die $2r$ Blätter auf Höhe $k+1$ ganz rechts sind, siehe Abbildung 7. In den ersten r Schritten des Greedy-Algorithmus nehmen wir jeweils die zwei rechtesten noch verbliebenen dieser Blätter (die vom selben Punkt ausgehen müssen), entfernen sie, und schreiben das erhaltene Ergebnis von $\frac{n}{2}$ zum gemeinsamen Vorgänger dieser Blätter.

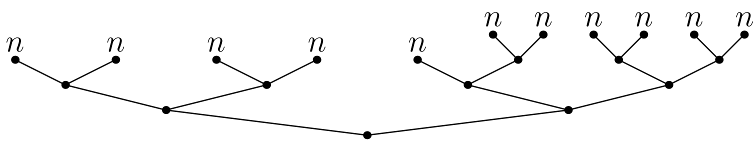


Abbildung 7: Aufgabe 4

Jetzt haben wir eine „Zeile" mit 2^k Blättern, von denen links einige mit n und rechts der Rest mit $\frac{n}{2}$ beschriftet ist. Etwas allgemeiner betrachten wir eine Zeile mit 2^ℓ Blättern für eine beliebige positive ganze Zahl ℓ, die mit Werten beschriftet sind, die von links nach rechts schwach monoton fallend sind, wobei die rechteste Zahl noch mindestens halb so groß ist wie die linkeste.

Nun ist es eine legale Folge von Greedy-Schritten, diese Zeile von links nach rechts abzuarbeiten. Man muss nie vor dem Erreichen des Endes dieser Zeile Zahlen aus der nächsten Zeile wählen, da diese wegen der Monotonie alle kleiner oder gleich der Hälfte der linkesten Zahl sind, und somit nach Voraussetzung kleiner oder gleich der rechtesten Zahl.

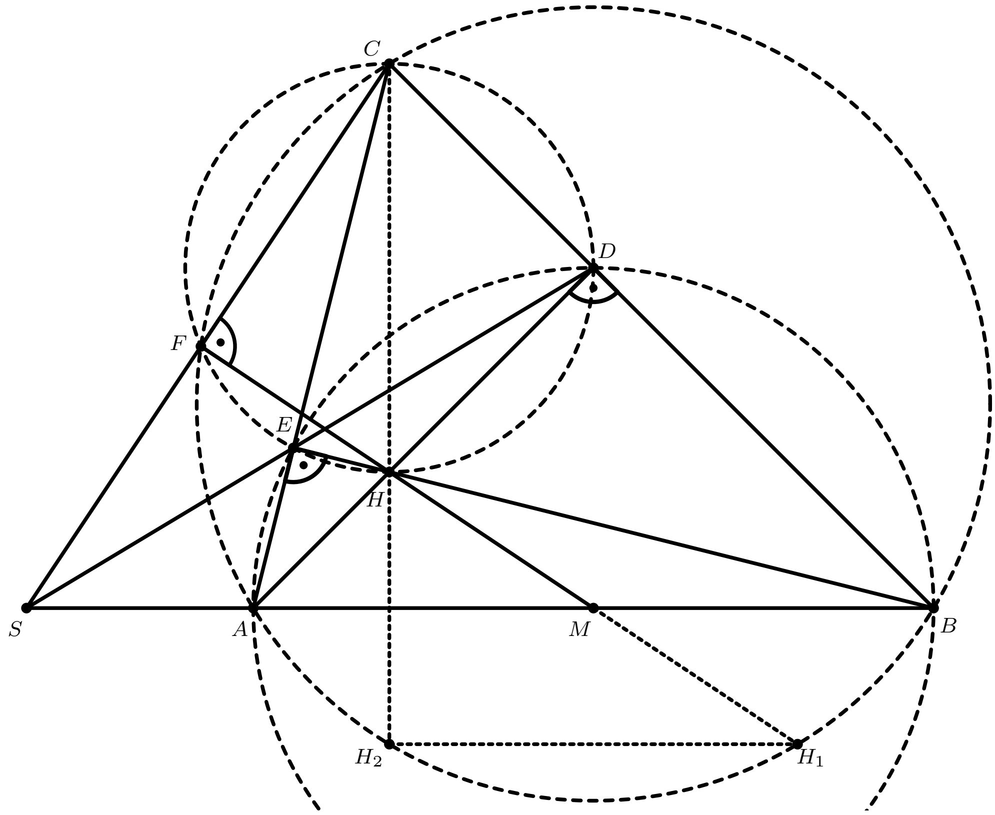
Damit entsteht eine neue Zeile der Länge $2^{\ell-1}$, die dieselben Voraussetzungen erfüllt. Somit können wir diesen Vorgang bis zur Wurzel wiederholen.

(Birgit Vera Schmidt)

Aufgabe 5. *Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC \neq BC$, M der Mittelpunkt der Seite AB, H der Höhenschnittpunkt, D auf BC der Fußpunkt der Höhe durch A und E auf AC der Fußpunkt der Höhe durch B.*

Man beweise, dass sich die Geraden AB, DE und die Normale auf MH durch C in einem Punkt S schneiden.

(Karl Czakler)



Lösung 1.

Es sei $\angle ACB = \gamma$ und F der Fußpunkt des Lotes von C auf MH. Wir zeigen zunächst, dass F am Umkreis k des Dreiecks ABC liegt.
Es sei H_1 der an M gespiegelte Punkt H. Das Viereck AH_1BH ist ein Parallelogramm und wegen $\angle AHB = \angle AH_1B = 180° - \gamma$ liegt der Punkt H_1 am Umkreis k des Dreiecks ABC. Spiegelt man den Punkt H an der Seite AB so erhält man den Punkt H_2. Aufgrund eines bekannten Satzes liegt dieser auch auf k. Die Strecke H_1H_2 ist mit dem Strahlensatz parallel zu AB, also normal zu CH_2. Daher ist CH_1 ein Durchmesser des Umkreises k und mit dem Satz von Thales folgt, dass F auf k liegt.
Wir haben daher:

- Die Punkte A, B, D, E liegen auf einem Kreis k_1 (Satz von Thales, Mittelpunkt M)
- Die Punkte C, E, H, D, F liegen auf einem Kreis k_2 (Satz von Thales, der Mittelpunkt ist der Halbierungspunkt der Strecke CH)
- Die Punkte A, B, F, C liegen auf dem Umkreis k.

Der Punkt S ist das Potenzzentrum dieser drei Kreise und alles ist gezeigt.

(Karl Czakler, Josef Greilhuber) □

Lösung 1a. Sei F der Fußpunkt des Lotes von C auf MH und G der Höhenfußpunkt von C auf AB. Dann liegt F nach dem Satz von Thales sowohl auf dem Kreis mit Durchmesser CH als auch auf dem mit Durchmesser CM. Außerdem verläuft der Feuerbachkreis durch die Punkte D, E, G und M. Folglich sind $CFED$, $CFGM$ und $DEGM$ Sehnenvierecke mit zugehörigen Potenzgeraden DE, $GM = AB$ und CF. Damit schneiden sich diese drei Geraden im Potenzpunkt S.

(Moritz Hiebler) □

Lösung 2. Die Punkte $ABDE$ liegen wegen der beiden rechten Winkel in D und E auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Sei nun S der Schnittpunkt von DE und AB. Er liegt damit auf der Polaren von H. Das gleiche gilt für den Schnittpunkt C von AE und BD.

Die Polare von H ist also die Gerade CS, die natürlich normal auf die Gerade MH durch den Kreismittelpunkt steht, wie gewünscht.

Die hier verwendete bekannte Tatsache, dass in einem Sehnenviereck $ABCD$ die Verbindungsgerade von $AB \cap CD$ und $AD \cap BC$ die Polare ℓ des Diagonalenschnittpunkts $X = AC \cap BD$ ist, kann wie folgt bewiesen werden. Wir wenden eine projektive Abbildung an, welche den Umkreis von $ABCD$ erhält und $AC \cap BD$ auf dessen Mittelpunkt O abbildet. Unter dieser Abbildung wird ℓ zur Polaren von O, also zur Ferngeraden. Andererseits muss $ABCD$ zu einm Rechteck werden, also schneiden AB und CD sowie AD und BC einander auf der Ferngeraden ℓ.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 6. *Man untersuche, ob es eine reelle Zahl r gibt, sodass die Gleichung*

$$x^3 - 2023x^2 - 2023x + r = 0$$

drei verschiedene rationale Lösungen besitzt.

(Walther Janous)

Lösung. Es sei $N = 2023$. Angenommen, die Gleichung $x^3 - Nx^2 - Nx + r = 0$ habe drei rationale Lösungen $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, wobei a, b, c ganze Zahlen und k eine positive ganze Zahl sei, und außerdem $\operatorname{ggT}(a, b, c, k) = 1$. Nach Vieta gilt $\frac{a}{k} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k} = N$ und $\frac{b}{k} \cdot \frac{c}{k} + \frac{a}{k} \cdot \frac{c}{k} + \frac{a}{k} \cdot \frac{b}{k} = -N$. Quadrieren und Äquivalenzumformungen ergeben

$$\begin{aligned} a + b + c &= kN & &\Rightarrow & a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ac + ab) &= k^2N^2 \\ bc + ac + ab &= -k^2N & &\Rightarrow & a^2 + b^2 + c^2 = k^2N^2 + 2k^2N &= k^2N(N + 2). \end{aligned}$$

Als nächstes schließen wir aus, dass k gerade ist. In diesem Fall wäre nämlich $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \mod 4$, woraus folgt, dass a, b, c alle gerade sein müssen, da 0 und 1 die einzigen quadratischen Reste modulo 4 sind. Das ist ein Widerspruch gegen die Annahme $\operatorname{ggT}(a, b, c, k) = 1$.

Für ungerade k gilt $k^2 \equiv 1 \mod 8$. Außerdem gilt $N = 2023 \equiv 7 \mod 8$. Daraus folgt $k^2N(N+2) \equiv 1 \cdot 7 \cdot 1 \equiv 7 \mod 8$. Die Summe dreier Quadrate ist jedoch niemals kongruent 7 modulo 8, was man am schnellsten durch Ausprobieren aller Möglichkeiten verifiziert (die quadratischen Reste modulo 8 sind $0, 1$ und 4). Daher kann es nie drei rationale Lösungen der obigen Gleichung geben.

(Josef Greilhuber) □