53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

25./26. Mai 2022

Aufgabe 1. *Man finde alle Funktionen* $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ *mit*

$$a - f(b) \mid af(a) - bf(b) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. Die einzige Lösung ist die Identität $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Lösung 1. Wir wählen $a = f(b)$, daraus folgt sofort, dass $af(a) - bf(b) = 0$ gelten muss. Das ergibt

$$f(b)(f(f(b)) - b) = 0.$$

Also gilt $f(f(b)) = b$ für alle $b \in \mathbb{Z}_{>0}$. Wir ersetzen jetzt in der gegebenen Relation b durch $f(b)$ und erhalten

$$a - b \mid af(a) - bf(b) = (a - b)f(a) + b(f(a) - f(b)).$$

Damit gilt auch

$$a - b \mid b(f(a) - f(b)).$$

Für $b = 1$ erhalten wir

$$a - 1 \mid f(a) - f(1).$$

Ersetzen wir a durch $f(a)$, erhalten wir

$$f(a) - 1 \mid a - f(1).$$

Es gilt also für alle $a > f(1)$, dass $f(a) - 1 \leq a - f(1)$ ist. Wäre $f(1) > 1$, erhielten wir $f(a) < a$ für $a > f(1)$ und damit entweder $a = f(f(a)) < f(a) < a$, was nicht möglich ist, oder $f(a) \leq f(1)$, was wegen $f(f(a)) = a$ nicht für unendlich viele Werte a möglich ist, also gilt $f(1) = 1$. Damit ist auch $a - 1 = f(a) - 1$, weil sich die beiden natürlichen Zahlen gegenseitig teilen, und wir erhalten als einzigen Lösungskandidaten die Identität. Man sieht sofort, dass das auch wirklich eine Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir setzen $a = 1$ und erhalten

$$f(b) - 1 \mid bf(b) - f(1) = b(f(b) - 1) + b - f(1).$$

Daraus folgt sofort

$$f(b) - 1 \mid b - f(1).$$

Mit $b = 1$ erhalten wir

$$a - f(1) \mid af(a) - f(1) = (a - f(1))f(a) + f(1)f(a) - f(1).$$

Daraus folgt sofort

$$a - f(1) \mid f(1)(f(a) - 1).$$

Für $\operatorname{ggT}(a, f(1)) = 1$ gilt also

$$a - f(1) \mid f(a) - 1$$

und wenn zusätzlich $a > f(1)$ gilt, somit $a - f(1) = f(a) - 1$, da sich die beiden natürlichen Zahlen gegenseitig teilen.

Für Zahlen n mit $\mathrm{ggT}(n, f(1)) = 1$ und $n > f(1)$ gilt also $f(n) = n + c$, mit $c = 1 - f(1)$.

Seien a und b zwei solche Zahlen, dann folgt aus der gegebenen Teilbarkeitsrelation, dass

$$a - (b + c) \mid a(a + c) - b(b + c) = a^2 - b^2 + ac - bc.$$

Somit gilt auch durch Ersetzen von a durch $b + c$ auf der rechten Seite

$$a - (b + c) \mid (b + c)^2 - b^2 + (b + c)c - bc = 2bc + 2c^2 = 2c(b + c)$$

und somit durch Ersetzen von $b + c$ durch a auch

$$a - (b + c) \mid 2ca.$$

Da b beliebig groß gewählt werden kann, gilt also $c = 0$ und somit $f(1) = 1$. Damit haben aber alle Zahlen > 1 die Eigenschaft, dass $n > f(1)$ und $\mathrm{ggT}(n, f(1)) = 1$ und somit gilt $f(a) = a + c = a$ für alle $a \in \mathbb{N}_{>0}$.

Man sieht auch sofort, dass die Identität auch wirklich eine Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 2. *Sei ABC ein spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, Mittelpunkt M der Seite AB und Winkelsymmetrale w des Winkels $\sphericalangle ACB$. Seien weiters S der Schnittpunkt der Streckensymmetrale der Seite AB mit w sowie F der Fußpunkt des Lotes von H auf w.*

Man beweise, dass die Strecken MS und MF gleich lang sind.

(Karl Czakler)

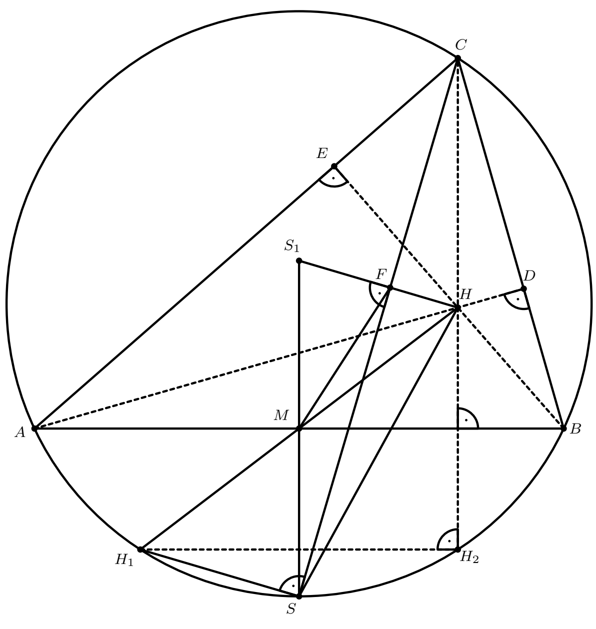

Abbildung 1: Abbildung zu Lösung 1

Lösung 1. Nach dem Südpolsatz liegt der Punkt S auf dem Umkreis k des Dreiecks ABC.

Sei H_1 der an M und H_2 der an AB gespiegelte Punkt H. Beide liegen bekannterweise auf k. Da die Strecke H_1H_2 normal auf H_2C steht, ist H_1C ein Durchmesser von k. Daraus folgt, dass H_1S normal auf SC steht.

Der Schnittpunkt der Streckensymmetralen von AB mit der Geraden HF sei S_1. Die Dreiecke MSH_1 und MS_1H sind kongruent, da $MH = MH_1$, $\angle H_1MS = \angle HMS_1$ und H_1S parallel zu HS_1 ist, letzteres weil beide Strecken normal auf $w = CS$ stehen. Somit gilt $MS = MS_1$.

Daher ist nach dem Satz von Thales M der Umkreismittelpunkt des rechtwinkeligen Dreiecks SS_1F und es gilt $MF = MS$ wie gewünscht.

(Karl Czakler, Josef Greilhuber) □

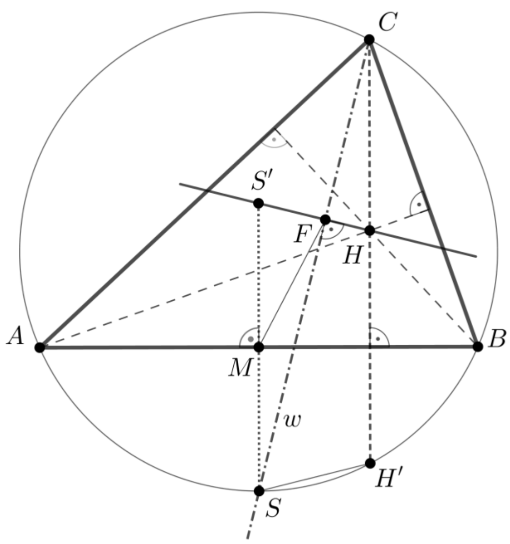

Abbildung 2: Abbildung zu Lösung 1a

Lösung 1a. Nach dem Südpolsatz liegt S auf dem Umkreis des Dreiecks ABC. Der an AB gespiegelte Punkt H, der bekanntermaßen ebenfalls auf dem Umkreis liegt, sei mit H' bezeichnet. Wir bezeichnen die Innenwinkel in A, B und C mit α, β bzw. γ, und arbeiten im Folgenden mit gerichteten Winkeln modulo 180°. Dann gilt $\sphericalangle SCH' = \frac{\gamma}{2} - (90° - \beta)$. Mit der Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck FHC ergibt sich $\sphericalangle FHH' = \beta + \frac{\gamma}{2}$.

Andererseits folgt mit dem Peripheriewinkelsatz im Umkreis des Dreiecks ABC, dass $\sphericalangle HH'S = \sphericalangle CH'S = \sphericalangle CBS = \beta + \sphericalangle ABS = \beta + \sphericalangle ACS = \beta + \frac{\gamma}{2}$.

Die Spiegelung an AB bildet H auf H' ab. Weil die Winkel $\sphericalangle HH'S$ und $\sphericalangle H'HF$ bis auf ihre Orientierung übereinstimmen, wird die Gerade $H'S$ auf die Gerade HF abgebildet. Sei S' nun das Bild von S unter dieser Spiegelung. Nach der vorhergehenden Beobachtung liegt S' auf der Geraden HF, also ist das Dreieck $FS'S$ rechtwinklig. Offensichtlich ist M der Mittelpunkt der Strecke zwischen S und S', und damit der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $FS'S$. Mit dem Satz von Thales folgt $MS = MF$.

(Theresia Eisenkölbl, Josef Greilhuber) □

Lösung 2. Wir bezeichnen die Innenwinkel in A, B und C mit α, β bzw. γ, sowie die Seiten BC, AC und AB mit a, b bzw. c. Nach dem Südpolsatz ist S der Mittelpunkt des Umkreisbogens AB, der C nicht enthält. Mit dem Peripheriewinkelsatz folgt $\sphericalangle SAM = \gamma/2$. Im rechtwinkligen Dreieck AMS erhalten wir $MS = \frac{c}{2}\tan(\gamma/2)$. Aus $\sphericalangle CSA = \sphericalangle CBA = \beta$ und $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ folgt $\sphericalangle CSM = \beta-(90°-\gamma/2) = \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Der Sinussatz im Dreieck BHC ergibt $HC = \sin(90° - \gamma)\frac{a}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma$.

Aus $\sphericalangle FCH = \frac{\gamma}{2} - (90° - \beta) = \frac{\beta-\alpha}{2}$ folgt

$$FC = HC\cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{a}{\sin\alpha}\cos\gamma\cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

Nach Sinussatz im Dreieck CSB gilt

$$CS = \sin\left(\beta + \tfrac{\gamma}{2}\right)\frac{a}{\sin\alpha} = \sin\left(90° + \tfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\frac{a}{\sin\alpha} = \cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\frac{a}{\sin\alpha}.$$

Damit erhalten wir

$$FS = CS - FC = \frac{a}{\sin\alpha}\cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right)(1-\cos\gamma).$$

Wir erhoffen nun, dass die Projektion von SM auf SF die Länge $SF/2$ hat, also

$$\frac{c}{2}\tan(\gamma/2)\cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\alpha}\cos\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right)(1-\cos\gamma)$$

gilt. Wir kürzen $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ und ersetzen mittels Sinussatzes $\frac{a}{\sin\alpha}$ durch $\frac{c}{\sin\gamma}$ und haben dann nach Kürzen von c noch

$$\tan\left(\tfrac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

zu zeigen. Wegen $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2(\frac{\gamma}{2})$ und $\sin\gamma = 2\sin(\frac{\gamma}{2})\cos(\frac{\gamma}{2})$ stimmt das.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 3. *Lisa schreibt eine positive ganze Zahl im Dezimalsystem an die Tafel und macht nun in jedem Zug das Folgende:*

Von der Zahl auf der Tafel wird die letzte Ziffer gelöscht und dann wird zur nun verbleibenden kürzeren Zahl (bzw. zu 0*, wenn die Zahl einstellig war) das Vierfache der gelöschten Ziffer addiert. Die Zahl auf der Tafel wird nun durch das Ergebnis dieser Rechnung ersetzt.*

Das wiederholt Lisa solange, bis sie zum ersten Mal eine Zahl erhält, die schon einmal auf der Tafel war.

(a) Man zeige, dass die Zugfolge immer endet.

(b) Welche Zahl steht zuletzt an der Tafel, wenn Lisa mit der Zahl $53^{2022}-1$ *beginnt?*

Beispiel: Beginnt Lisa mit der Zahl 2022*, so erhält sie im ersten Zug* $202+4\cdot 2 = 210$ *und insgesamt die Folge*

$$2022 \mapsto 210 \mapsto 21 \mapsto 6 \mapsto 24 \mapsto 18 \mapsto 33 \mapsto 15 \mapsto 21.$$

Da Lisa 21 *zum zweiten Mal erhält, endet die Zugfolge.*

(Stephan Pfannerer)

Lösung. Sei f jene Abbildung, die sich aus der Rechenvorschrift ergibt. Schreiben wir die positive ganze Zahl x eindeutig als $10a+b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $0 \leq b \leq 9$, bekommen wir $f(x) = f(10a+b) = a+4b$. Sei weiters $(x_i)_{i\geq 0}$, die Folge an Zahlen, die Lisa erhält, wenn sie mit der positiven ganzen Zahl x_0 beginnt. Diese ist gegeben durch die Rekursion $x_{i+1} = f(x_i)$.

(a) Direkt aus der Definition erkennen wir, dass $x_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ für alle $i \geq 0$ (und somit der Prozess wohldefiniert ist).

Wir zeigen zunächst, dass für $x_i \geq 40$ das nachfolgende Folgenglied echt kleiner wird, also $x_i > x_{i+1}$. Sei dazu $x_i = 10a + b$ wie oben. Wir erhalten aus $10a + b = x_i > x_{i+1} = a + 4b$ durch Umformen die äquivalente Ungleichung $9a > 3b$. Da nach Voraussetzung $x_i \geq 40$ gilt, muss $a > 3$ sein und somit ist die Ungleichung gültig.

Weiter zeigt man leicht, dass für $x_i \leq 39$ auch $x_{i+1} \leq 39$ ist. Für $x_i = 10a + b \leq 39$ muss $a \leq 3$ und $b \leq 9$ gelten. Also folgt $x_{i+1} = f(x_i) = a + 4b \leq 3 + 4 \cdot 9 = 39$.

Damit gilt aber: Es gibt eine ganze Zahl $N \geq 0$, sodass $x_i \in \{1, 2, \ldots, 39\}$ für alle $i \geq N$. Da dies aber nur mehr endlich viele unterschiedliche Werte sind, gibt es $i \neq j$ mit $x_i = x_j$.

(b) Die Antwort ist 39. Wir beobachten zunächst, dass $f(x) \equiv 4 \cdot x \pmod{39}$. Sei dazu $x = 10a + b$, wie oben, dann gilt:

$$f(x) = a + 4b \equiv 40a + 4b = 4 \cdot (10a + b) = 4x \pmod{39}.$$

Wir untersuchen nun unseren Startwert modulo 39. Wir haben

$$53^{2022} - 1 \equiv 1^{2022} - 1 \equiv 0 \pmod{13}$$

und ähnlich

$$53^{2022} - 1 \equiv (-1)^{2022} - 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

und bekommen somit $39 | 53^{2022} - 1 = x_0$. Mit Induktion erhalten wir mit obiger Beobachtung $39 | x_i$ für alle $i \geq 0$.

Sei nun N der erste Folgenindex mit $0 < x_N < 40$. Da $39 | x_N$ muss $x_N = 39$ gelten. Weil für alle $i < N$ die Folge x_i streng monoton fallend ist und $f(39) = 39$, ist 39 jene Zahl, die zum ersten Mal doppelt an der Tafel steht.

(Michael Drmota) □

Aufgabe 4. *Man entscheide, ob es für jedes Polynom P vom Grad ≥ 1 mit ganzzahligen Koeffizienten unendlich viele Primzahlen gibt, die jeweils mindestens ein $P(n)$ für eine positive ganze Zahl n teilen.*

(Walther Janous)

Antwort. Es gibt für jedes solche Polynom unendlich viele Primzahlen der geforderten Art.

Lösung 1. Wir werden zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen der geforderten Art gibt.
Es sei $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $m \geq 1$, $a_m \neq 0$ und a_j ganzzahlig, $0 \leq j \leq m$.

- Für $a_0 = 0$ gilt für alle Primzahlen p, dass $p \mid P(p)$.
- Im Fall von $a_0 \neq 0$ nehmen wir an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen der geforderten Art, die wir mit $p_1, \ldots, p_N$ bezeichnen ($N \geq 1$, weil das Polynom nicht immer ± 1 sein kann). Es sei Π das Produkt dieser N Primzahlen. Dann haben wir für alle positiven ganzen Exponenten k, dass

$$P(a_0 \Pi^k) = a_m (a_0 \Pi^k)^m + \ldots + a_1 a_0 \Pi^k + a_0, \text{ also}$$

$$P(a_0 \Pi^k) = a_0 (a_m a_0^{m-1} \Pi^{km} + \ldots + a_1 \Pi^k + 1).$$

Der in Klammer stehende Faktor ist durch keine der N Primzahlen teilbar. Deshalb muss er den Wert $+1$ oder -1 haben. Damit gilt aber für unendlich viele Exponenten k, dass

$$P(a_0 \Pi^k) = a_0$$

oder für unendlich viele Exponenten k, dass

$$P(a_0 \Pi^k) = -a_0.$$

Dafür müsste P jedoch konstant sein.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Wir werden zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen der geforderten Art gibt.
Es sei $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $m \geq 1$, $a_m \neq 0$ und a_j ganzzahlig, $0 \leq j \leq m$.

- Für $a_0 = 0$ teilt jede Primzahl p den Funktionswert $P(p)$.
- Im Fall von $a_0 \neq 0$ betrachten wir das Polynom $P(a_0^2 x) = a_0 R(x)$ mit $R(x) = a_m a_0^{2m-1} x^m + \ldots + a_1 a_0 x + 1$. Im Weiteren werden wir eine unendliche Folge von Primzahlen der gewünschten Art induktiv konstruieren.

Induktionsanfang: Wegen $|R(n)| \to \infty$ bei $n \to \infty$ gibt es eine positive ganze Zahl n und eine Primzahl p_1, die $R(n)$ und folglich auch $P(a_0^2 n)$ teilt.

Induktionsannahme: Es seien $p_1, \ldots, p_N$ konstruiert ($N \geq 1$).

Induktionsbeweis: Um eine weitere Primzahl p_{N+1} zu erhalten, betrachten wir $\xi_k = |R(k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_N)|$ bei $k \to \infty$. Auf Grund von $\xi_k \to \infty$ gibt es eine positive ganze Zahl k und eine Primzahl p, die ξ_k teilt und wegen der Form des Polynoms R weder $p_1, \ldots, p_{N-1}$ noch p_N sein kann. Weil die Primzahl p auch $P(a_0^2 \cdot k \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_N)$ teilt, setzen wir $p_{N+1} = p$.

(Walther Janous) □

Aufgabe 5. *Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB.*

Wir wählen einen Punkt P im Inneren der Dreieckshöhe durch C. Der Kreis mit Durchmesser CP schneide die Gerade durch B und P ein weiteres Mal im Punkt D_P und die Gerade durch A und C ein weiteres Mal im Punkt E_P.

Man beweise, dass es einen Punkt F gibt, sodass für jede Wahl von P die Punkte D_P, E_P und F auf einer Geraden liegen.

(Walther Janous)

Antwort. Der gesuchte Punkt F ist der Mittelpunkt von AB.

Lösung. Es sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Wir wollen zeigen, dass M auf allen Geraden $g_P = D_P E_P$ liegt, und somit der gesuchte Punkt F ist. Aufgrund der Definition von D_P und E_P ist CD_PE_PP

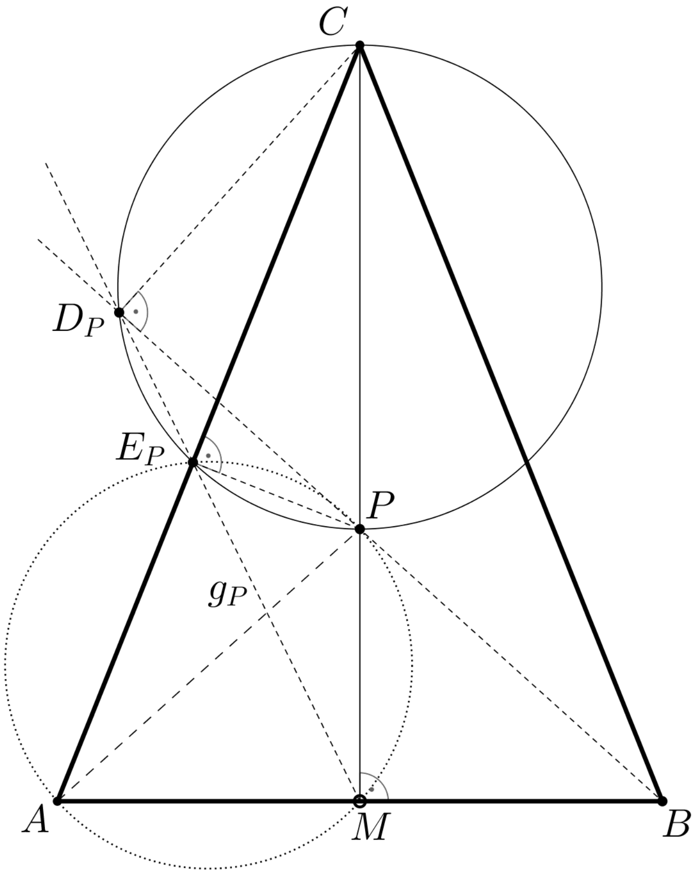

Abbildung 3: Aufgabe 5

ein Sehnenviereck und es gilt $PE_P \perp AE_P$. Da auch $PM \perp AM$ gilt, ist auch $AMPE_P$ ein Sehnenviereck.

Wir möchten nun zeigen, dass D_PE_P und ME_P denselben Winkel mit der Geraden AC haben, woraus alles folgt. Der zweimal vorkommende Punkt E_P und die Gerade AC sind so gewählt, dass alle Punkte in den gefundenen Sehnenvierecken vorkommen.

Wir rechnen also im Umkreis von CD_PE_PP

$$\sphericalangle(D_PE_P, AC) = \sphericalangle(D_PE_P, E_PC) = \sphericalangle(D_PP, PC) = \sphericalangle(BP, MC)$$

und im Umkreis von $AMPE_P$

$$\sphericalangle(ME_P, AC) = \sphericalangle(ME_P, AE_P) = \sphericalangle(MP, AP) = \sphericalangle(MC, AP).$$

Da MC die Höhe im gleichschenkeligen Dreieck ABC ist, gilt $\sphericalangle(BP, MC) = \sphericalangle(MC, AP)$, und wir erhalten somit $\sphericalangle(D_PE_P, AC) = \sphericalangle(ME_P, AC)$. Die Punkte D_P, E_P und M liegen somit unabhängig von der Wahl von P auf einer gemeinsamen Geraden, und M ist, wie behauptet, der gesuchte Punkt F.

Bemerkung: Der Beweis kann ganz ähnlich unter Verwendung des Sehnenverecks $BMDC$ durchgeführt werden.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 6. *(a) Man beweise, dass sich ein Quadrat mit Seitenlänge* 1000 *in* 31 *Quadrate zerlegen lässt, von denen zumindest eines eine Seitenlänge kleiner als* 1 *hat.*

(b) Man zeige, dass eine entsprechende Zerlegung auch in 30 *Quadrate möglich ist.*

(Walther Janous)

Lösung. (a) In diesem Fall führt die „Viertelungsmethode“ zum Ziel. Zuerst wird das ganze Quadrat in vier $(= 1 + 3)$ kongruente Quadrate zerlegt, von denen eines gewählt und in vier kongruente Quadrate zerlegt wird. Nach diesem Schritt haben wir $4 + 3 = 7$ Teilquadrate. Nun iterieren wir dieses Vorgehen insgesamt zehn Mal und erhalten damit $1 + 10 \cdot 3 = 31$ Quadrate, wobei die kleinsten vier die Seitenlänge $1000/2^{10} < 1$ haben.

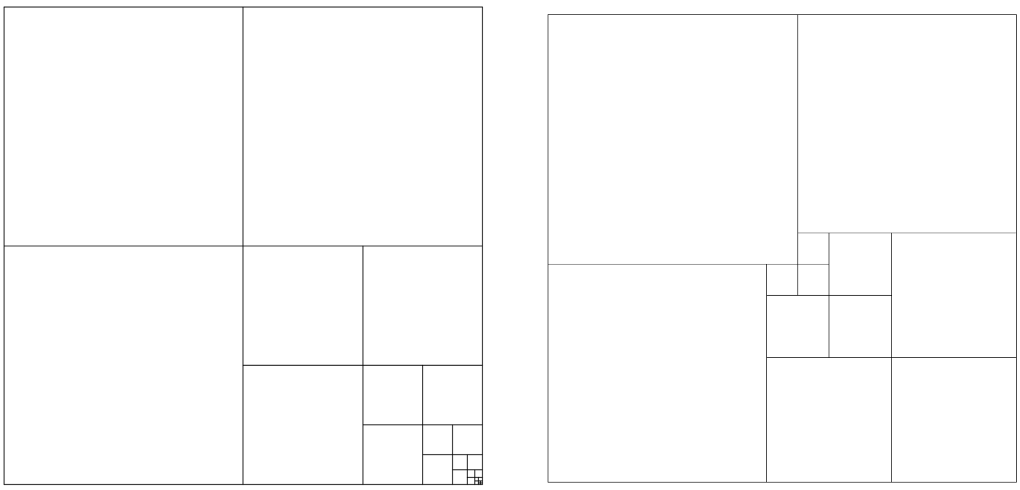

Abbildung 4: Links ist die Viertelungsmethode für Teil (a), rechts ist die Konstruktion von Teil (b) für ein Quadrat mit Seitenlänge 15.

(b) Damit wir freundliche Zahlen bekommen, vergrößern wir das 1000×1000-Quadrat auf ein 1023×1023-Quadrat. Wir zerlegen dieses Quadrat in ein 512×512-Quadrat, zwei 511×511-Quadrate und eine Region R_1 aus einem 512×512-Quadrat Q_1, aus dem ein 1×1-Quadrat entfernt wird. Wir haben also bisher drei Quadrate verwendet und müssen mit R_1 weitermachen.

Nun vierteln wir Q_1, die Region R_1 zerfällt dadurch in drei weitere Quadrate mit Seitenlänge 252 sowie eine Region R_2 aus einem 256×256-Quadrat Q_2 mit fehlendem 1×1-Quadrat.Damit haben wir sechs Quadrate verwendet und müssen mit R_2 weitermachen.

Viertelung von Q_2 führt auf drei weitere Quadrate und R_3, insgesamt somit neun Quadrate. Iteration dieses Vorgehens liefert im achten Schritt drei 2×2-Quadrate und R_8, also insgesamt $3 \cdot 9 = 27$ Quadrate. Weil sich R_8 in drei 1×1-Quadrate zerlegen lässt, haben wir für das 1023×1023-Quadrat eine Zerlegung in 30 Quadrate gefunden, deren kleinste Seitenlänge 1 ist. Nach Verkleinerung ergibt sich die positive Antwort mit einer Seitenlänge von $1000/1023$.

(Walther Janous) □

Bemerkung. Eine Zerlegung in 29 Quadrate ist ebenfalls möglich
Siehe „1020d“ in der Datei:
http://www.squaring.net/sq/ss/cpss/o29/cpsso29.pdf

(Theresia Eisenkölbl)