51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

20./21. Juni 2020

Aufgabe 1. *Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S. Seien weiters P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABS und Q der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCS. Die Parallele zu AD durch P und die Parallele zu CD durch Q schneiden einander im Punkt R.*

Man beweise, dass R auf BD liegt.

(Karl Czakler)

Lösung 1. Wir betrachten gerichtete Winkel modulo 180° (oder alternativ: wir betrachten hier nur den Fall, dass die beiden Winkel $\sphericalangle DBA$ und $\sphericalangle DBC$ spitz sind und müssten alle anderen Fälle analog betrachten). Es sei E der Fußpunkt von S auf CD, siehe Abbildung 1.

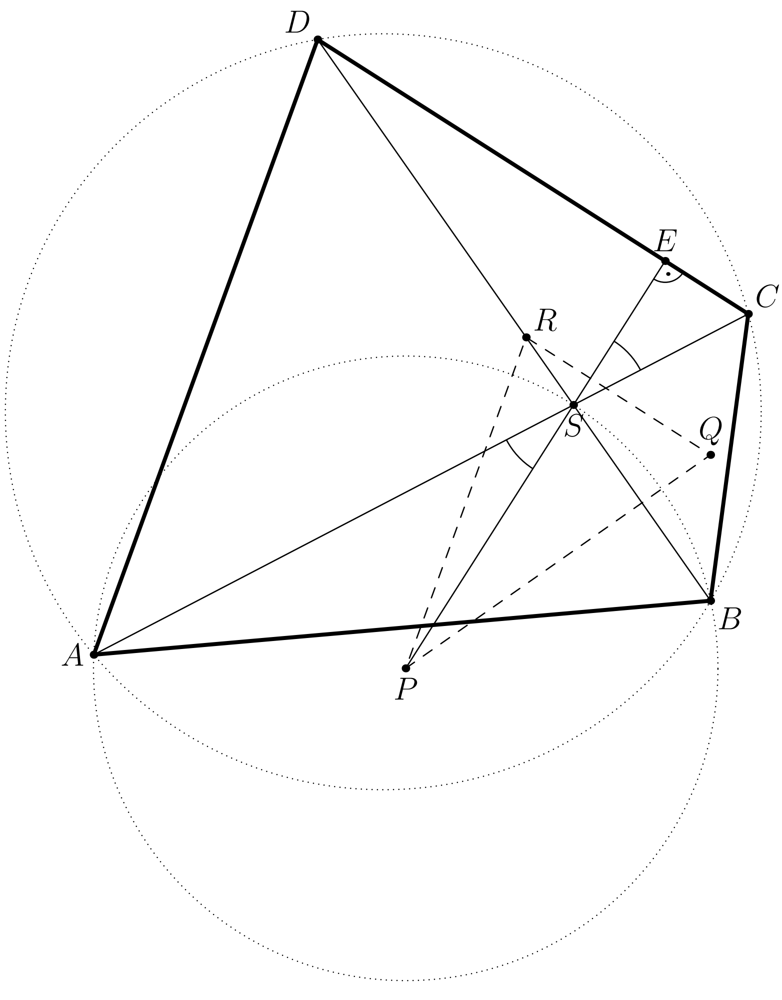

Abbildung 1: Aufgabe 1, Lösung 1

Wegen der Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck APS und dem Zentriwinkelsatz im Umkreis des Dreiecks ABS gilt

$$\sphericalangle ASP = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle SPA = 90^\circ - \sphericalangle SBA.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz im gegebenen Sehnenviereck $ABCD$ gilt

$$90^\circ - \sphericalangle SBA = 90^\circ - \sphericalangle DBA = 90^\circ - \sphericalangle DCA.$$

Mit der Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CES gilt schließlich

$$90° - \sphericalangle DCA = \sphericalangle CSE.$$

Zusammen gilt somit $\sphericalangle ASP = \sphericalangle CSE$.

Daher liegen die Punkte P, S und E auf einer Geraden. Diese Gerade steht normal zu DC und daher auch normal zu ihrer Parallelen QR. Die Höhe des Dreiecks PQR durch den Eckpunkt P liegt daher auf der Geraden PS. Analog zeigt man, dass die Höhe durch den Punkt Q auf der Geraden QS liegt.

Daher ist S der Höhenschnittpunkt des Dreiecks PQR. Da die Gerade BD normal auf ihre Streckensymmetrale PQ steht und durch S geht, muss auf dieser Geraden der Punkt R liegen.

(Karl Czakler) □

Lösung 2. Wir betrachten gerichtete Winkel modulo 180° (oder alternativ: wir betrachten hier nur den Fall, dass die beiden Winkel $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle BAC$ spitz sind und müssten alle anderen Fälle analog betrachten).

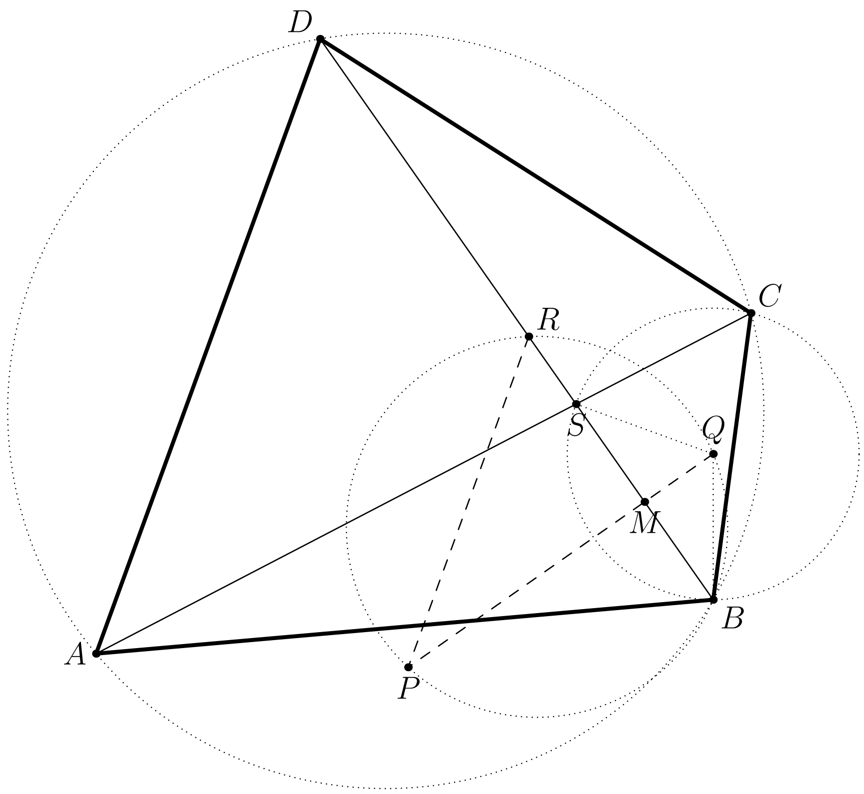

Abbildung 2: Aufgabe 1, Lösung 2

Es sei M der Mittelpunkt von BS, siehe Abbildung 2. Da $QR \parallel CD$ und $PR \parallel AD$ gilt, gilt auch $\sphericalangle ADC = \sphericalangle PRQ$.

Da Q der Umkreismittelpunkt von BCS ist, gilt nach dem Zentriwinkelsatz

$$\sphericalangle MQB = \sphericalangle SCB = \sphericalangle ACB.$$

Nach dem Peripheriewinkelsatz im gegebenen Sehnenviereck $ABCD$ folgt

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB.$$

Wir haben damit

$$\sphericalangle MQB = \sphericalangle ADB \tag{1}$$

bewiesen.

Nach der Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck QMB und (1) gilt

$$\sphericalangle QBS = \sphericalangle QBM = 90° - \sphericalangle MQB = 90° - \sphericalangle ADB.$$

Analog gilt auch

$$\sphericalangle SBP = 90° - \sphericalangle BDC,$$

und wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\sphericalangle QBP &= \sphericalangle QBS + \sphericalangle SBP \\ &= (90° - \sphericalangle ADB) + (90° - \sphericalangle BDC) \\ &= 180° - (\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC) \\ &= 180° - \sphericalangle ADC \\ &= 180° - \sphericalangle PRQ.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass $PBQR$ ein Sehnenviereck ist. Nach (1) und dem Peripheriewinkelsatz im Sehnenviereck $PBQR$ gilt

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle MQB = \sphericalangle PQB = \sphericalangle PRB,$$

woraus zusammen mit der Parallelität von AD und PR folgt, dass R wie behauptet auf BD liegt.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir betrachten gerichtete Winkel modulo 180°.

Sei R_1 der Schnittpunkt der Parallelen zu AD durch P mit BD und sei R_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu DC durch Q mit BD, siehe Abbildung 3. Wenn wir zeigen, dass $R_1 = R_2$, so sind wir fertig.

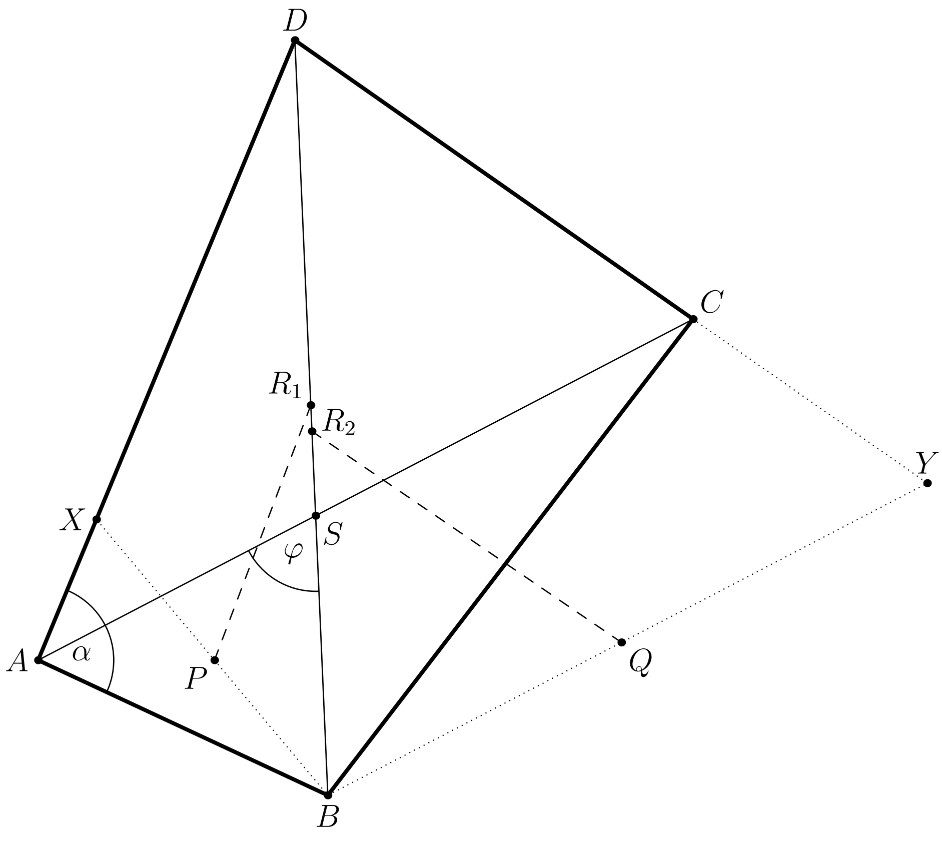

Abbildung 3: Aufgabe 1, Lösung 3, wobei PR_1 und QR_2 für die Skizze jeweils um 3° gedreht wurden, damit R_1 und R_2 vorerst *nicht* zusammenfallen

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BP mit AD mit X und den Schnittpunkt von BQ mit DC mit Y. Nach dem Strahlensatz in den Dreiecken BPR_1 und BXD sowie BQR_2 und BYD reicht es zu zeigen, dass $BP : BX = BQ : BY$.

Sei $\varphi := \sphericalangle ASB$ und $\alpha := \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAX$. Nach dem Zentriwinkelsatz im Umkreis des Dreiecks ABS gilt $\sphericalangle APB = 2\varphi$, daher $\sphericalangle PBA = 90^\circ - \varphi$ und somit $\sphericalangle AXB = 90^\circ - \alpha + \varphi$. Nach dem Sinussatz gilt $BX = AB \sin\alpha / \sin(90^\circ - \alpha + \varphi)$ und $2BP = AB / \sin\varphi$. Daraus folgt

$$\frac{BP}{BX} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha + \varphi)}{2\sin\varphi\sin\alpha} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{2\sin\varphi\sin\alpha}.$$

Für $BQ : BY$ ergibt sich analog ein Ausdruck, wo α und φ durch $180^\circ - \alpha$ bzw. $180^\circ - \varphi$ zu ersetzen sind, was am Ergebnis letztlich nichts ändert.

(Clemens Heuberger) □

Aufgabe 2. *In der Ebene liegen* 2020 *Punkte, von denen einige schwarz und die restlichen grün sind.*

Für jeden schwarzen Punkt gilt: Es gibt genau zwei grüne Punkte, die den Abstand 2020 *von diesem schwarzen Punkt haben.*

Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von grünen Punkten.

(Walther Janous)

Antwort. Die kleinstmögliche Anzahl sind 45 grüne Punkte.

Lösung 1. Wir definieren „grüne Kreise“ als Kreise mit einem grünen Mittelpunkt und mit Radius 2020. Schwarze Punkte dürfen gemäß Angabe nur dort liegen, wo genau zwei grüne Kreise einander schneiden.

Wenn man g grüne Kreise hat, kann sich jeder mit jedem höchstens zwei Mal schneiden, es gibt also maximal $\binom{g}{2} \cdot 2 = g^2 - g$ schwarze Punkte (oder sogar noch weniger, wenn in manchen der Schnittpunkte mehr als zwei grüne Kreise einander schneiden). Zählt man noch die g grünen Punkte hinzu, gibt es daher insgesamt maximal $g^2 - g + g = g^2$ Punkte.

Wegen $44^2 < 2020 (< 45^2)$ benötigen wir somit mindestens 45 grüne Punkte.

Wir versuchen nun, 45 grüne Kreise so zu platzieren, dass sich jeder mit jedem zwei Mal schneidet und es keinen Punkt gibt, in dem drei oder mehr Kreise einander schneiden.

Ein Beispiel einer möglichen Konstruktion geben wir an, indem wir irgendwo in der Ebene eine Strecke AB mit einer Länge kleiner als 4040 wählen und die Mittelpunkte der grünen Kreise beliebig darauf platzieren.

Es ist klar, dass je zwei Kreise einander zwei Mal schneiden, weil die Distanz der Mittelpunkte weniger als der zweifache Radius ist.

Weiters lässt es sich leicht nachprüfen, dass keine drei Kreise einander in einem Punkt schneiden, weil der Normalabstand eines Schnittpunktes zu AB umso kleiner ist, je weiter die Mittelpunkte auseinander liegen. Gäbe es einen Punkt S, durch den drei Kreise k_1, k_2 und k_3 gehen, so müsste für deren Mittelpunkte daher $M_1M_2 = M_2M_3 = M_1M_3$ gelten, was nicht möglich ist, da die Mittelpunkte ja alle auf einer Geraden liegen.

Deshalb erhalten wir insgesamt $\frac{45\cdot(45-1)}{2} \cdot 2 = 1980$ paarweise Schnittpunkte der 45 Kreise. Wenn wir alle bis auf fünf von ihnen schwarz färben, haben wir die gewünschte Konfiguration mit $45 + (1980 - 5) = 2020$ Punkten erhalten.

Eine Konstruktion mit 45 grünen Punkten ist somit tatsächlich möglich, womit dies die kleinstmögliche Anzahl ist.

(Walther Janous, Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 1a. Statt Kreise mit grünen Mittelpunkten zu betrachten, können wir auch Kreise mit schwarzen Mittelpunkten betrachten.

Dass genau zwei grüne Punkte im Abstand 2020 von einem schwarzen Punkt liegen, bedeutet in anderen Worten: Sie liegen auf einem Kreis mit Radius 2020 und einem schwarzen Mittelpunkt.

Betrachten wir ein beliebiges Paar von zwei grünen Punkten, so können diese auf höchstens zwei solchen Kreisen liegen (da ein Kreis durch Radius und zwei Punkte auf der Kreislinie eindeutig bestimmt ist bis auf Spiegelung an der Geraden durch die zwei Punkte).

Wenn wir alle möglichen Paare grüner Punkte betrachten, erhalten wir damit wieder, dass es maximal $2 \cdot \binom{g}{2}$ schwarze Punkte geben kann, und setzen fort wie in Lösung 1.

Bemerkung. In Lösung 1 haben wir pro Paar von grünen Punkten genau zwei Schnittpunkte der Kreise mit diesen als Mittelpunkt gefunden, mussten danach einige der Schnittpunkte eventuell noch verwerfen, weil sich dort mehr als zwei Kreise schneiden, und konnten letztlich maximal gleich viele schwarze Punkte wie Schnittpunkte haben. Dagegen haben wir hier bereits etwas direkter gezeigt, dass wir pro Paar von grünen Punkten maximal 2 schwarze Punkte haben können.

(Walther Janous) □

Lösung 1b. Wir geben eine weitere Möglichkeit an, 45 grüne Punkte so zu platzieren, dass die Kreise mit Radius 2020, die diese Punkte als Mittelpunkte haben, jeweils zwei Schnittpunkte miteinander haben und in keinem Punkt mehr als zwei dieser Kreise einander schneiden.

Dazu wählen wir einen Kreis k mit Radius kleiner als 2020 und darauf 45 grüne Punkte. Wir betrachten Kreise mit Radius 2020 um jeden dieser grünen Punkte. Es ist klar, dass jeder dieser Kreise jeden anderen dieser Kreise schneidet. Zu zeigen bleibt, dass keine Schnittpunkte zusammenfallen.

Betrachten wir dazu einen beliebigen Schnittpunkt S zweier Kreise, so hat der Kreis mit Mittelpunkt S und Radius 2020 genau zwei Schnittpunkte mit k, nämlich die beiden grünen Punkte, aus deren Kreisen er entstanden ist. Somit liegt kein weiterer grüner Punkt im Abstand von 2020 zu S.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 1c. Wie zuvor versuchen wir 45 grüne Punkte so zu platzieren, dass die Kreise mit Radius 2020, die diese Punkte als Mittelpunkte haben, jeweils zwei Schnittpunkte miteinander haben und sich kein Schnittpunkt auf drei Kreisen befindet.

Wir wählen die grünen Punkte nun sukzessive einen nach dem anderen. Einerseits achten wir darauf, dass der neue grüne Punkt genügend nahe bei den bisherigen ist, was garantiert, dass sich sein Kreis mit den bisherigen Kreisen, die ja denselben Radius haben, in jeweils zwei Punkten schneidet. Andererseits möchten wir vermeiden, dass der neue Punkt Abstand 2020 zu einem der bisherigen Schnittpunkte hat. Somit müssen wir die endlich vielen Kreise mit Radius 2020 um die bisherigen Schnittpunkte vermeiden. Das sind aber lediglich endlich viele verbotene Kreise in einem zweidimensionalen Bereich, somit bleiben unendlich viele Punkte mit den gewünschten Eigenschaften zur Wahl und wir können unsere 45 Punkte geeignet wählen.

Es gibt nun viele Möglichkeiten, Spezialfälle dieser Konstruktion anzugeben, indem man bei der Wahl der Punkte größere Einschränkungen trifft, zum Beispiel, dass alle auf einer Strecke oder einem Kreis liegen.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 1d. Wir geben eine weitere Möglichkeit an, 45 grüne Punkte so zu platzieren, dass die Kreise mit Radius 2020, die diese Punkte als Mittelpunkte haben, jeweils zwei Schnittpunkte miteinander haben und sich kein Schnittpunkt auf drei Kreisen befindet.

Da die Kreise denselben Radius haben, haben sie automatisch zwei Schnittpunkte, wenn die Mittelpunkte nicht zu weit voneinander entfernt sind. Drei Kreise können sich nur dann im selben Punkt schneiden, wenn die drei Mittelpunkte von diesem Punkt den Abstand 2020 haben, was bedeutet, dass die drei Punkte auf einem Kreis mit Radius 2020 liegen.

Wir wählen jetzt beliebige 45 Punkte in der Ebene als grüne Punkte und ändern dann den Maßstab so, dass alle gewünschten Eigenschaften erfüllt sind. Dazu verkleinern wir das gesamte Bild solange, bis die Abstände genügend klein sind, damit die zugehörigen Kreise immer zwei Schnittpunkte haben. Um dann noch zu verhindern, dass einer der endlich vielen auftretenden Kreise durch drei oder mehr grüne

Punkte Radius 2020 hat, müssen wir einfach zusätzlich die endlich vielen ungünstigen Skalierungen vermeiden, indem wir zum Beispiel das Bild so weit verkleinern, dass alle Radien kleiner als 2020 sind.

Auch dieser Zugang inkludiert die anderen Konstruktionen als Spezialfälle. Man sieht nun, dass das Legen der Punkte auf eine Strecke oder einen Kreis besonders günstig ist, weil es keinen oder nur einen Kreis durch drei oder mehr grüne Punkte gibt, auf dessen Radius man aufpassen muss.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 3. *Seien a eine feste positive ganze Zahl und (e_n) die Folge, die durch $e_0 = 1$ und*

$$e_n = a + \prod_{k=0}^{n-1} e_k$$

für $n \geq 1$ definiert ist.

(a) *Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die ein Element der Folge teilen.*

(b) *Man zeige, dass es eine Primzahl gibt, die kein Element der Folge teilt.*

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1.

Lemma. Es gilt $\operatorname{ggT}(a, e_n) = 1$ für alle $n \geq 0$.

Beweis. Wir zeigen mit Induktion nach n, dass $\operatorname{ggT}(a, e_k) = 1$ für alle natürlichen Zahlen $k \leq n$. Für $n = 0$ ist das offensichtlich. Für den Induktionsschritt von $n-1$ auf n beobachten wir, dass $\operatorname{ggT}(a, e_n) = \operatorname{ggT}(a, a + \prod_{k=0}^{n-1} e_k) = \operatorname{ggT}(a, \prod_{k=0}^{n-1} e_k) = 1$ gilt, weil $\operatorname{ggT}(a, a+b) = \operatorname{ggT}(a, b)$ für alle ganzen Zahlen b gilt und a nach Induktionsvoraussetzung zu jedem Faktor e_k mit $k \leq n-1$ bereits teilerfremd ist. Das beweist das Lemma. ■

Und jetzt spielen wir für den ersten Teil die Sache wie dereinst angeblich Euklid. Seien p_1, …, p_N verschiedene Primzahlen, die jeweils mindestens ein Folgenglied teilen, so gibt es ein gewisses M, sodass jede dieser Primzahlen mindestens eines der Folgenglieder e_n mit $n < M$ teilt. Damit teilt jede dieser Primzahlen $\prod_{k=0}^{M-1} e_k$, aber laut Lemma nicht a, somit kann keine dieser Primzahlen e_M teilen. Da offenkundig $e_M > 1$ gilt, muss es einen Primteiler von e_M geben, der noch nicht auf der Liste ist. Somit kann man immer eine weitere neue Primzahl zur Liste hinzufügen und erhält unendlich viele Primzahlen.

Für den zweiten Teil betrachten wir zunächst den Fall $a \neq 1$. Dann gibt es eine Primzahl, die a teilt. Nach dem obigen Lemma teilt diese Primzahl kein Element der Folge.

Sei also jetzt $a = 1$. Wir setzen $m_n := \prod_{k=0}^{n} e_k$ für $n \geq 0$. Aus der Rekursion für die gegebene Folge ergibt sich $m_{n+1} = m_n e_n = m_n(1 + m_n)$ und $m_0 = 1$. Modulo 5 ergeben sich $m_1 \equiv 2 \pmod 5$, $m_2 \equiv 1 \pmod 5$. Da jeweils m_{n+1} nur von m_n abhängt, ist damit m_n stets kongruent zu 1 oder 2 modulo 5 und damit sicher nie durch 5 teilbar. Aus der Definition von m_n ergibt sich sofort, dass e_n ein Teiler davon ist und somit auch nie durch 5 teilbar ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Wir nehmen an, es gibt nur endlich viele Primzahlen, die Folgenglieder teilen.

Zuerst stellen wir fest, dass die Folge (e_n) streng monoton wachsend ist und daher lauter verschiedene Elemente enthält, da das Produkt größer oder gleich e_{n-1} ist und dann a dazu kommt.

Nehmen wir nun weiter an, dass es unter den endlich vielen Primzahlen, die Folgenglieder teilen, eine Primzahl p gibt, die zwei Folgenglieder e_m und e_n, $m < n$ mit einem Exponenten größer als $k = v_p(a)$ teilt. Dann gilt: p^{k+1} teilt e_n und $\prod_{k=0}^{n-1} e_k$, aber p^{k+1} teilt nicht a. Das ist aber im Widerspruch zur Rekursionsgleichung.

Daher gibt es für jede der endlich vielen Primzahlen höchstens ein Folgenglied, das von ihr mit einem höheren Exponenten als dem Exponenten in a geteilt wird.

Für jedes Folgenglied sind daher entweder alle Exponenten der endlich vielen Primzahlen kleiner oder gleich den jeweiligen Exponenten in a und es ist damit Teiler von a, oder mindestens eine der endlich vielen Primzahlen hat einen Exponenten größer als in a. Da es nur endlich viele Teiler von a gibt und es im zweiten Fall höchstens ein Folgenglied pro Primzahl dieser Art geben kann, ergibt das nur endlich viele Möglichkeiten für die Folgenglieder, die aber, wie oben bewiesen, alle verschieden sein müssen.

Das ist ein Widerspruch zur Annahme und es muss tatsächlich unendlich viele Primzahlen geben, die als Teiler von Folgengliedern auftreten.

Für den zweiten Teil erledigen wir den Fall $a \neq 1$ wie in der Lösung 1 und betrachten für den Fall $a = 1$ wieder die Folge modulo 5. Wir nennen die Produkte wieder $m_n = \prod_{k=0}^{n} e_k$.

Wir rechnen uns jetzt mit $e_n = 1 + m_{n-1}$ und $m_n = m_{n-1}e_n$ schrittweise beide Folgen modulo 5 aus. Da das Paar (e_n, m_n) nur von den Werten (e_{n-1}, m_{n-1}) abhängt, wissen wir, dass sich die Werte wiederholen, wenn wir dasselbe Paar wiederfinden.

Die Rechnung ergibt

n	$e_n \pmod 5$	$m_n \pmod 5$
0	1	1
1	2	2
2	3	1
3	2	2
4	3	1

Also nimmt e_n modulo 5 nur die Werte 1, 2 oder 3 an und ist somit niemals durch 5 teilbar.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2a. Wir geben hier noch ein Alternativargument für den Fall $a = 1$ des zweiten Teils an.

Für $a = 1$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$e_n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} e_k = e_{n-1}(e_{n-1} - 1).$$

Es gilt also $e_n = e_{n-1}^2 - e_{n-1} + 1$ für $n \geq 2$ mit $e_0 = 1$ und $e_1 = 2$. Daraus folgt nach Multiplikation mit 4 sofort, dass

$$4e_n = (2e_{n-1} - 1)^2 + 3.$$

Damit dieser Ausdruck durch eine Primzahl p teilbar werden kann, muss -3 ein quadratischer Rest modulo p sein. Wir überlegen uns also, wann -3 für eine Primzahl $p \neq 2, 3$ ein quadratischer Rest ist:

Dann gilt unter der Verwendung der Eigenschaften des Legendre-Symbols

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}\left(\frac{p}{3}\right)(-1)^{(p-1)/2} = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Sei also $p \neq 2$ eine Primzahl mit $p \equiv 2 \pmod 3$ (z. B. 5, 11, 17 oder die unendlich vielen anderen Primzahlen mit dieser Eigenschaft, die nach dem Satz von Dirichlet existieren). Dann ist p sicher kein quadratischer Rest modulo 3, da 2 kein quadratischer Rest modulo 3 ist und es ist also e_n für $n \geq 2$ sicher nicht durch p teilbar. Die Anfangswerte $e_0 = 1$ und $e_1 = 2$ sind natürlich auch nicht durch $p \neq 2$ teilbar, also teilt p kein Element der Folge.

(Theresia Eisenkölbl, Birgit Vera Schmidt) □

Aufgabe 4. *Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass*

$$f(xf(y) + 1) = y + f(f(x)f(y))$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(Theresia Eisenkölbl)

Antwort. Die einzige derartige Funktion ist $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung 1. Durch Betrachten der Variablen y sieht man sofort, dass die Funktion f injektiv ist, denn aus $f(a) = f(b)$ folgt unter Verwendung der Funktionalgleichung für $y = a$ und $y = b$, dass

$$a = f(xf(a) + 1) - f(f(x)f(a)) = f(xf(b) + 1) - f(f(x)f(b)) = b.$$

Wir setzen nun $y = 0$ und erhalten wegen der Injektivität

$$xf(0) + 1 = f(x)f(0).$$

Wäre $f(0) = 0$, dann würde sich $1 = 0$ ergeben, dieser Fall kann also nicht eintreten. Damit kann man durch $f(0)$ dividieren und erhält $f(x) = x + c$ für eine Konstante c.

Beim Einsetzen in die ursprüngliche Funktionalgleichung erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} & x(y + c) + 1 + c = y + (x + c)(y + c) + c \\ \iff \qquad & 1 = y(1 + c) + c^2 \end{aligned}$$

die Bedingungen $c = -1$ (Koeffizient von y) und $c^2 = 1$ (konstanter Term). Somit ist die einzige Lösung $f(x) = x - 1$.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Durch zweimalige Anwendung der Gleichung für (x, y) und (y, x) erhalten wir

$$f(xf(y) + 1) - y = f(f(x)f(y)) = f(f(y)f(x)) = f(yf(x) + 1) - x.$$

In dieser neuen Gleichung

$$f(xf(y) + 1) - y = f(yf(x) + 1) - x$$

setzen wir jetzt $y = 0$ und erhalten

$$f(xf(0) + 1) = f(1) - x.$$

Im Fall $f(0) = 0$ ergibt sich sofort ein Widerspruch, da $f(1) - x$ nicht für alle x denselben Wert annehmen kann. Also können wir $x = (t - 1)/f(0)$ setzen und erhalten

$$f(t) = f(1) - (t - 1)/f(0) = at + b, \ t \in \mathbb{R},$$

für geeignete Werte a und b.

Einsetzen in die gegebene Gleichung liefert

$$a(x(ay + b) + 1) + b = y + a(ax + b)(ay + b) + b$$

für alle reellen x und y.

Das ist durch Koeffizientenvergleich äquivalent zu

$$\begin{aligned} a^2 &= a^3 \\ ab &= a^2 b \\ 0 &= 1 + a^2 b \\ a + b &= ab^2 + b. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich sofort, dass a und b nicht Null sein können, also folgt aus der zweiten Gleichung, dass $a = 1$ ist und somit wegen der dritten Gleichung $b = -1$ ist. Dieses Paar erfüllt aber auch alle vier Gleichungen, somit ist $f(x) = x - 1$ die einzige Lösung der Funktionalgleichung.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 3. Wir betrachten im Folgenden eine etwas erweiterte Fragestellung.

Sei α eine reelle Zahl.

Man bestimme (in Abhängigkeit von α) alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(xf(y)+\alpha) = y + \alpha f(f(x)f(y))$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir unterscheiden im folgenden Beweis zwei Fälle.

- Für $\alpha = 0$ hat $f(xf(y)) = y$ für alle reellen x und y zu gelten. Deshalb erhalten wir mit $x = 0$ den Widerspruch $f(0) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
- Sei im Weiteren $\alpha \neq 0$. Wir setzen $C = f(0)$.

  Mit $x = 0$ folgt $f(\alpha) = y + \alpha f(Cf(y))$ für $y \in \mathbb{R}$. (Daraus folgt insbesondere $C \neq 0$. Andernfalls hätten wir $f(\alpha) = y + \alpha f(0)$, also $f(\alpha) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.)

  Dagegen ergibt $y = 0$, dass $f(Cx+\alpha) = \alpha f(Cf(x))$ für $x \in \mathbb{R}$.

  Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir $f(Cx+\alpha) = f(\alpha) - x$ für $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von $w = Cx+\alpha$ ergibt sich daraus
$$f(w) = f(\alpha) - \frac{w-\alpha}{C},\ w \in \mathbb{R}.$$
  Für $w = 0$ erhalten wir $f(\alpha) = C - \frac{\alpha}{C}$. Folglich gilt
$$f(w) = C - \frac{w}{C},\ w \in \mathbb{R}$$
  und unserer Funktionalgleichung lautet damit
$$\begin{aligned} & C - \frac{xf(y)+\alpha}{C} = y + \alpha\Big(C - \frac{f(x)f(y)}{C}\Big) \\ \iff \quad & C^2 - x\Big(C - \frac{y}{C}\Big) - \alpha = Cy + C^2\alpha - \alpha\Big(C - \frac{x}{C}\Big)\Big(C - \frac{y}{C}\Big) \\ \iff \quad & C^2 - Cx + \frac{xy}{C} - \alpha = Cy + \alpha x + \alpha y - \alpha\frac{xy}{C^2}. \end{aligned}$$
  Weil dies für alle reellen Zahlen x und y zu gelten hat, wählen wir speziell $x = 0$ und erhalten die für alle y gültige Gleichung
$$C^2 - \alpha = y(C+\alpha)$$
  und es müssen folglich $C + \alpha = 0$ und $C^2 - \alpha = 0$ sein. Daraus folgen $C^2 + C = 0$, also $C = -1$ (wegen $C \neq 0$), und $\alpha = 1$. Man überprüft aber umgekehrt leicht, dass $f(x) = x - 1$ für $\alpha = 1$ tatsächlich eine Lösung ist.

Deshalb ist die Funktionalgleichung genau für $\alpha = 1$ lösbar und hat die Funktion $f(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, als eindeutige Lösung.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Wir würden gerne die Variablen so wählen, dass die beiden Argumente gleich werden und damit fast alles in der Gleichung wegfällt. Wir hätten also gerne

$$xf(y) + 1 = f(x)f(y).$$

Da x hier sowohl als einzelne Variable als auch als $f(x)$ im Ausdruck auftaucht, drücken wir lieber $f(y)$ aus und erhalten

$$f(y) = \frac{1}{f(x) - x}.$$

Hier gibt es zwei Schwierigkeiten: Der Nenner darf nicht Null sein und es muss dann auch ein passendes y geben, sodass $f(y)$ diesen Wert annimmt. Wir lösen das zweite Problem zuerst, indem wir Surjektivität zeigen.

Dazu setzen wir $x = 0$ in die ursprüngliche Funktionalgleichung ein, damit der linke Ausdruck konstant wird. Dann nimmt

$$f(f(0)f(y)) = f(1) - y$$

sicher alle reellen Werte an, wenn y alle reellen Werte durchläuft, also ist f surjektiv wie gewünscht. Insbesondere kann die linke Seite nicht konstant sein und es gilt somit $f(0) \neq 0$.

Nehmen wir jetzt an, dass es ein x_0 gibt, sodass $f(x_0) \neq x_0$. Wir setzen dieses x_0 ein und wählen y so, dass $f(y) = \frac{1}{f(x_0)-x_0}$. Damit wird die ursprüngliche Funktionalgleichung zu $0 = y$, da die anderen Terme gleich sind. Damit gilt

$$f(0) = \frac{1}{f(x_0) - x_0}.$$

Somit gilt für jedes x, dass entweder $f(x) = x$ oder $f(x) = x + \frac{1}{f(0)} =: x + c$.

Nehmen wir jetzt an, dass es einen Wert a mit $f(a) = a$ gibt und setzen $x = a$ in die ursprüngliche Funktionalgleichung ein. Das ergibt

$$f(af(y) + 1) = y + f(af(y)).$$

Die möglichen Werte links sind $af(y) + 1$ und $af(y) + 1 + c$. Die möglichen Werte rechts sind $y + af(y)$ und $y + af(y) + c$. Wenn man die vier möglichen Kombinationen durchprobiert, erhält man $y = 1$, $y = 1 + c$, $y = 1 - c$ und $y = 1$. Für alle anderen y ergibt sich also sofort ein Widerspruch.

Somit gilt $f(x) = x + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wir erhalten wie zuvor aus der Probe, dass $f(x) = x - 1$ die einzige Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 5. *Sei h ein Halbkreis mit Durchmesser AB. Es wird ein beliebiger Punkt P im Inneren der Strecke AB gewählt. Die durch P verlaufende Normale auf AB schneide h im Punkt C. Die Strecke PC zerlegt die Halbkreisfläche in zwei Teile. In jeden davon werde jener Kreis eingeschrieben, der AB, PC und h berührt. Die Berührpunkte der beiden Kreise mit AB werden mit D und E bezeichnet, wobei D zwischen A und P liege.*

Man beweise, dass die Größe des Winkels $\sphericalangle DCE$ nicht von der Wahl von P abhängt.

(Walther Janous)

Lösung 1. Wir bezeichnen jenen der beiden eingeschriebene Kreise, der AB in E berührt, mit k. Weiters bezeichnen wir den Berührpunkt von k und h mit U und den Berührpunkt von k und PC mit V, siehe Abbildung 4. Weiters sei K der Kreis, der zur Hälfte aus h besteht.

Lemma. Die Punkte U, V und A liegen auf einer Geraden.

Beweis. Der gemeinsame Berührpunkt U von k und K ist das Zentrum einer Streckung, die k auf K abbildet. Daher wird auch der Berührpunkt mit der Tangente normal auf AB auf den Berührpunkt mit der Tangente normal auf AB abgebildet. Das heißt, dass V auf A abgebildet wird. Damit liegen U, V und A auf einer Geraden. ■

Lemma. Es gilt $AC = AE$.

Beweis. Aus Lemma 1 folgt, dass die Dreiecke APV und AUB ähnlich sind, da sie einen gemeinsamen Winkel und jeweils einen rechten Winkel haben. Also gilt: $\frac{AV}{AP} = \frac{AB}{AU}$ und damit $AV \cdot AU = AP \cdot AB$.

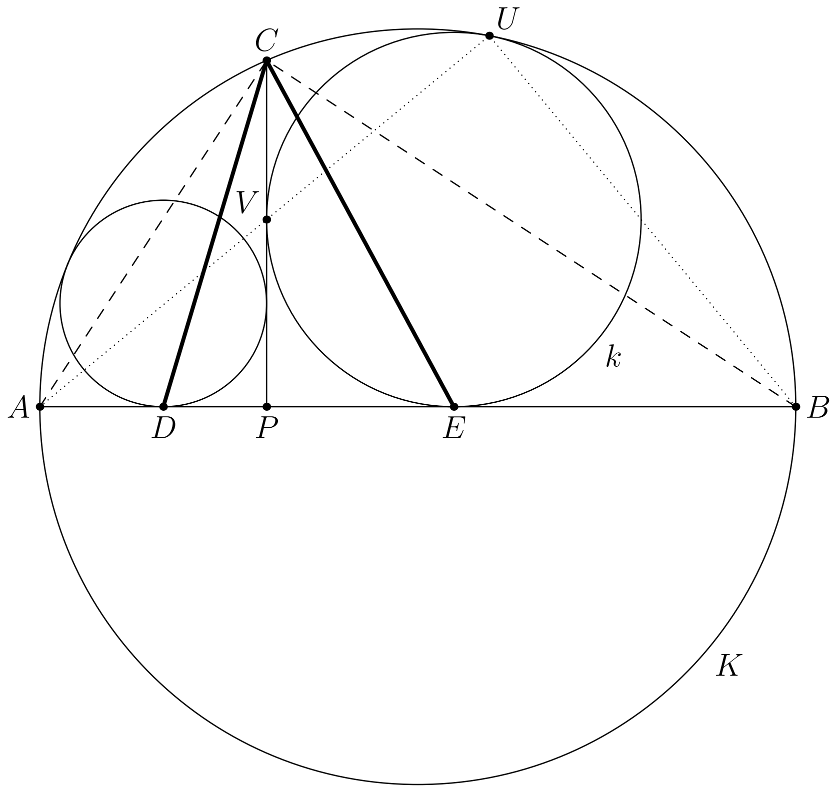

Abbildung 4: Aufgabe 5, Lösung 1

Unter Verwendung der Potenz von A am Kreis k erhalten wir damit aber

$$AE^2 = AV \cdot AU = AP \cdot AB.$$

Andererseits gilt nach dem Kathetensatz im Dreieck ABC, dass $AC^2 = AP \cdot AB$. Also folgt $AC = AE$ wie gewünscht. ■

Daraus folgt wegen des gleichschenkeligen Dreiecks AEC, dass

$$\sphericalangle PCE = 90^\circ - \sphericalangle AEC = \sphericalangle CAB/2 = (90^\circ - \sphericalangle ABC)/2 = \sphericalangle PCB/2.$$

Die Gerade CE ist also die Winkelsymmetrale von PCB. Analog ist CD die Winkelsymmetrale von ACP.

Damit gilt $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ACB/2 = 45^\circ$ unabhängig von der Wahl von P.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2. Wir verwenden die in einem rechtwinkligen Dreieck üblichen Bezeichnungen $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ und $p = AP$. Den Mittelpunkt von AB bezeichnen wir mit O. Wie in Lösung 1 sei k derjenige eingeschriebene Kreis, der AB in E berührt, sein Mittelpunkt und sein Radius seien mit M bzw. r bezeichnet, und U sei der Punkt, in dem sich h und k berühren, siehe Abbildung 5.

Zunächst möchten wir r aus den übrigen Größen bestimmen. Damit erhalten wir folgendes Lemma, welches zum zweiten Lemma aus Lösung 1 äquivalent ist.

Lemma. Es gilt $r = b - p$.

Beweis. Da die Tangenten in U an h und k übereinstimmen, muss M auf der Geraden OU liegen. Damit muss $OM = OU - MU = \frac{c}{2} - r$ gelten. Nach Konstruktion gilt $PE = ME = r$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OEM erhalten wir

$$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = OM^2 = OE^2 + EM^2 = \left(p + r - \frac{c}{2}\right)^2 + r^2,$$

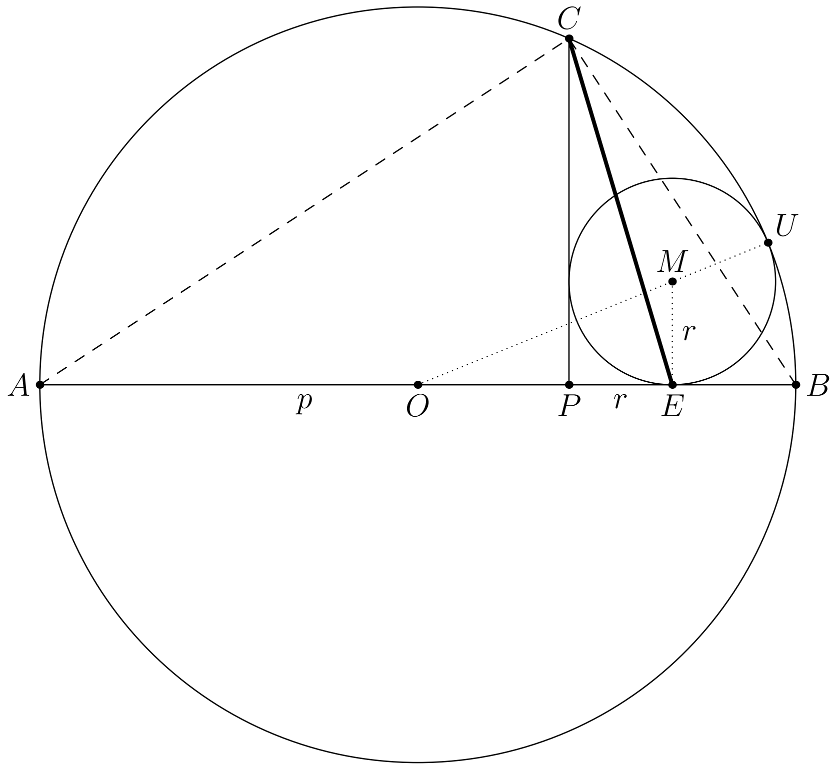

Abbildung 5: Aufgabe 5, Lösung 2

was auch im Fall, dass E zwischen A und O liegt oder dass $E = O$ gilt, gültig bleibt, obwohl dann $p + r - \frac{c}{2} \leq 0$ gilt. Daraus folgen

$$r^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 - \left(p + r - \frac{c}{2}\right)^2 = p(c - 2r - p)$$

und damit durch Umstellen und den Kathetensatz

$$(r + p)^2 = pc = b^2$$

und somit $r + p = b$. ■

Lemma. Die Gerade CE ist die Winkelsymmetrale des Winkels PCB.

Beweis. Da die Winkelsymmetrale die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, stellen wir zunächst diese beiden Verhältnisse in unseren Variablen dar. Unter Verwendung der Ähnlichkeit der Dreiecke CPB und ACB erhalten wir

$$\frac{PE}{EB} = \frac{r}{c - p - r} = \frac{b - p}{c - b},$$
$$\frac{CP}{CB} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Die Verhältnisse sind genau dann gleich, wenn

$$cb - pc = bc - b^2 \iff pc = b^2,$$

was genau die Aussage des Kathetensatzes ist. ■

Wie in Lösung 1 folgt daraus die Behauptung der Aufgabe.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 3. Wir führen einen vektoriellen Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $P = (u, 0)$ mit $-1 < u < 1$. Den Ursprung bezeichnen wir mit $O = (0, 0)$. Wir bezeichnen jenen der eingeschriebenen Kreise, der AB in E berührt, mit k_2. Seinen Mittelpunkt bezeichnen wir mit M_2 und seinen Radius mit r_2. Den Berührpunkt zwischen k_2 und h bezeichnen wir mit U_2.

Da k_2 die Strecken AB und PC berührt, muss

$$M_2 = P + \begin{pmatrix} r_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + r_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

gelten. Da die Tangenten an h und k in U_2 gleich sind, muss M_2 auf der Geraden durch U_2 und O liegen. Da $OU_2 = 1$ und $M_2U_2 = r_2$, folgt $OM_2 = 1 - r_2$, also laut (2), dass

$$(u + r_2)^2 + r_2^2 = (1 - r_2)^2,$$

was äquivalent zu

$$r_2^2 + 2(1 + u)r_2 + u^2 - 1 = 0$$

ist. Daraus ergibt sich $r_2 = -1 - u + \sqrt{2(1 + u)}$, da $r_2 > 0$ gelten muss und $1 + u > 0$ gilt.

Für den Radius r_1 des anderen eingeschriebenen Kreises erhalten wir analog (es reicht, u durch $-u$ zu ersetzen), dass $r_1 = -1 + u + \sqrt{2(1 - u)}$.

Daraus ergeben sich die Koordinaten von $D = (u - r_1, 0) = (1 - \sqrt{2(1 - u)}, 0)$, $E = (u + r_2, 0) = (-1 + \sqrt{2(1 + u)}, 0)$ und $C = (u, \sqrt{1 - u^2})$. Mit den Substitutionen $\alpha = \sqrt{(1 + u)/2}$ und $\beta = \sqrt{(1 - u)/2}$ ergeben sich

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 - u - \sqrt{2(1 - u)} \\ -\sqrt{1 - u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta^2 - 2\beta \\ -2\alpha\beta \end{pmatrix} = 2\beta \begin{pmatrix} \beta - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -1 - u + \sqrt{2(1 + u)} \\ -\sqrt{1 - u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha^2 + 2\alpha \\ -2\alpha\beta \end{pmatrix} = 2\alpha \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen nun den Cosinus des von den Vektoren $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CE}$ eingeschlossenen Winkels φ als

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} \beta - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} \beta - 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 - \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}\right|}.$$

Mit der Beobachtung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ erhalten wir nach Quadrieren

$$\cos^2\varphi = \frac{((\beta - 1)(1 - \alpha) + \alpha\beta)^2}{((\beta - 1)^2 + \alpha^2)((\alpha - 1)^2 + \beta^2)} = \frac{(\alpha + \beta - 1)^2}{(2 - 2\beta)(2 - 2\alpha)}$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2 + 2\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta}{1 - \alpha - \beta + \alpha\beta} = \frac{1}{2}.$$

Da $\varphi = \sphericalangle DCE < \sphericalangle ACB = 90°$, ist damit $\varphi = 45°$ und somit von P unabhängig.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 4. Wir bemerken zuerst: Weil D und E auf der Strecke AB liegen und $\sphericalangle ACB = 90°$ gilt, folgt $\sphericalangle DCE < 90°$.

Mit Hilfe einer Zeichnung für den Fall, dass P der Mittelpunkt O von AB ist, gelangt man zur Vermutung $\sphericalangle DCE = 45°$, die wir im Weiteren beweisen werden.

O. B. d. A. sollen der Radius von h gleich 1 sein und P auf der Strecke OB liegen ($P \neq B$). Sei $OP = u$. Dann gilt $0 \leq u < 1$. Für den Radius r_2 des Kreises, der AB im Punkt E berührt und dessen

Mittelpunkt wir mit M_2 bezeichnen, ergibt sich wie in Lösung 3 aus dem rechtwinkeligen Dreieck OEM_2, dass

$$\begin{aligned} & r_2 = -(u+1) + \sqrt{2+2u} \\ \iff \quad & r_2 = \sqrt{1+u}(\sqrt{2} - \sqrt{1+u}). \end{aligned}$$

In entsprechender Weise erhält man für den Radius r_1 des anderen eingeschriebenen Kreises, dass

$$r_1 = \sqrt{1-u}(\sqrt{2} - \sqrt{1-u}).$$

Mit dem Höhen- oder dem Sehnensatz erhält man

$$PC^2 = AP \cdot PB = (1+u)(1-u) = 1-u^2.$$

Für $\varphi = \sphericalangle DCP$ und $\psi = \sphericalangle PCE$, also $\sphericalangle DCE = \varphi + \psi$, haben wir

$$\tan\varphi = \frac{r_1}{CP} \text{ und } \tan\psi = \frac{r_2}{CP}.$$

Deshalb können wir unsere Behauptung folgendermaßen äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} & \sphericalangle DCE = 45^\circ \\ \iff \quad & \tan(\varphi+\psi) = 1 \\ \iff \quad & \frac{\tan\varphi + \tan\psi}{1 - \tan\varphi\tan\psi} = 1 \\ \iff \quad & \tan\varphi + \tan\psi = 1 - \tan\varphi\tan\psi \\ \iff \quad & \tan\varphi\tan\psi + \tan\varphi + \tan\psi + 1 = 2 \\ \iff \quad & (\tan\varphi + 1)(\tan\psi + 1) = 2 \\ \iff \quad & (r_1 + CP)(r_2 + CP) = 2CP^2. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$r_2 + CP = \sqrt{1+u}(\sqrt{2} - \sqrt{1+u}) + \sqrt{(1-u)(1+u)} = \sqrt{1+u}(\sqrt{2} - \sqrt{1+u} + \sqrt{1-u})$$

und in entsprechender Weise

$$r_1 + CP = \sqrt{1-u}(\sqrt{2} - \sqrt{1-u} + \sqrt{1+u}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} (\sqrt{2} - \sqrt{1+u} + \sqrt{1-u})(\sqrt{2} - \sqrt{1-u} + \sqrt{1+u}) &= 2 - (\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u})^2 \\ &= 2 - 1 - u - 1 + u + 2\sqrt{(1-u)(1+u)} \\ &= 2\sqrt{1-u^2} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$(r_1 + CP)(r_2 + CP) = 2(1-u^2) = 2CP^2$$

und wir sind am Ende des Beweises.

(Walther Janous) □

Aufgabe 6. *Die Spieler Alfred und Bertrand legen gemeinsam ein Polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit dem vorgegebenen Grad $n \geq 2$ fest. Dazu wählen sie in n Zügen abwechselnd den Wert jeweils eines Koeffizienten, wobei alle Koeffizienten ganzzahlig sein müssen und $a_0 \neq 0$ gelten muss. Alfred ist im ersten Zug an der Reihe. Alfred gewinnt, wenn das Polynom am Ende eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.*

(a) *Für welche n kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten a_j von rechts nach links, also für $j = 0, 1, \dots, n-1$, festgelegt werden?*

(b) *Für welche n kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten a_j von links nach rechts, also für $j = n-1, n-2, \dots, 0$, festgelegt werden?*

(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger)

Antwort. In beiden Fällen kann Alfred den Sieg genau dann erzwingen, wenn n ungerade ist.

Lösung 1. (a) Ist Alfred als letzter am Zug, so setzt er einfach 1 ein und erhält eine lineare Gleichung in a_{n-1} dafür, dass 1 eine Nullstelle ist. Da a_{n-1} mit Koeffizienten 1 in dieser linearen Gleichung auftritt, besitzt diese eine ganzzahlige Lösung.

Ist Bertrand als letzter am Zug, so können ganzzahlige Nullstellen nur für die Teiler des absoluten Gliedes entstehen. Damit erhält er endlich viele lineare Gleichungen im Koeffizienten a_{n-1} dafür, dass einer dieser Teiler des absoluten Glieds eine Nullstelle ist und wählt a_{n-1} eben anders.

(b) Ist Alfred als letzter am Zug, so schreibt er $P(x) = xQ(x) + a_0$. Er wählt eine ganze Zahl $y \neq 0$ mit $Q(y) \neq 0$ (das ist sicher möglich, weil $Q(x)$ nicht das Nullpolynom ist) und setzt $a_0 = -yQ(y)$. Dann folgt $a_0 \neq 0$ und $P(y) = 0$.

Ist Bertrand als letzter am Zug, so schreibt er ebenfalls

$$P(x) = xQ(x) + a_0$$

und wählt eine Primzahl p, die weder eine der endlich vielen Nullstellen von $Q(x) + 1 = 0$ oder $Q(-x) - 1 = 0$ ist noch gleich $-Q(1)$ oder $Q(-1)$ ist. Er setzt nun $a_0 = p$. Die Bedingungen sorgen dafür, dass $P(\pm p) \neq 0$ und $P(\pm 1) \neq 0$ gelten und daher P keine ganzzahlige Lösung haben kann.

Damit kann Alfred den Sieg genau dann sicherstellen, wenn er zuletzt am Zug ist, also n ungerade ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Wenn in Frage (b) Bertrand als letzter drankommt, ist der Grad n gerade. Das Polynom ohne a_0 hat also ein Minimum. Wählt Bertrand a_0 genügend groß, dann hat es gar keine reelle Nullstelle, also auch keine ganzzahlige.

(Theresia Eisenkölbl) □