50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale – Lösungen

29./30. Mai 2019

Aufgabe 1. *Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die*

$$f(2x + f(y)) = x + y + f(x)$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(Gerhard Kirchner)

Antwort. Die einzige Lösung ist $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung 1. Wir wählen gemäß der Methode „Gleichsetzen der Argumente“ x so, dass die Argumente $2x + f(y)$ und x auf den beiden Seiten der Gleichung gleich werden, also $x = -f(y)$ gilt. Für diesen Wert von x wird die Gleichung zu $f(-f(y)) = -f(y) + y + f(-f(y))$ und damit $f(y) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Es ist aber sofort klar, dass diese Funktion die Gleichung auch wirklich erfüllt, also ist sie die einzige Lösung.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2. Zunächst zeigen wir, dass f injektiv ist. In der Tat folgt für reelle Zahlen y und z aus $f(y) = f(z)$, dass

$$x + z + f(x) = f(2x + f(z)) = f(2x + f(y)) = x + y + f(x),$$

also $y = z$, das ist die behauptete Injektivität.

Nun setzen wir in der ursprünglichen Gleichung $x = -y$ und erhalten $f(-2y + f(y)) = f(-y)$, also $-2y + f(y) = -y$ wegen der Injektivität. Daraus folgt $f(y) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Durch Probe erhalten wir also die eindeutige Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(y) = y$.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 2a. Wie in Lösung 2 zeigt man über die Variable y leicht die Injektivität.

Nun ergibt $x = y = 0$, dass $f(f(0)) = f(0)$ gilt, also gilt auch $f(0) = 0$ wegen der Injektivität. Mit $x = 0$ ergibt sich, dass $y = f(f(y))$ und mit $y = 0$, dass $f(2x) = x + f(x)$. Ersetzen wir darin x durch $f(x)$, so erhalten wir

$$f(2f(x)) = f(x) + f(f(x)) = f(x) + x = f(2x).$$

Aufgrund der Injektivität folgt daraus $2f(x) = 2x$, also $f(x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$, und man überprüft leicht, dass das wirklich eine Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Lösung 2b. Wie in Lösung 2a erhalten wir $f(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei a eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $x = f(a)$ und $y = a$ und erhalten

$$f(2f(a) + f(a)) = f(a) + a + f(f(a)) = f(a) + 2a.$$

Wenden wir f auf beide Seiten an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & f(f(3f(a))) = f(2a + f(a)) \\ \iff \quad & 3f(a) = a + a + f(a) \\ \iff \quad & 2f(a) = 2a \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$.

Wir überprüfen leicht, dass die Funktion f mit $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ tatsächlich eine Lösung ist.

(Birgit Vera Schmidt) □

Lösung 3. Wir setzen in der gegebenen Funktionalgleichung $x = 0$ und erhalten $f(f(y)) = y + f(0)$, insbesondere ist

$$f(f(0)) = f(0). \tag{1}$$

Ersetzen wir nun in der ursprünglichen Gleichung y durch $f(y)$, so folgt

$$f(2x + y + f(0)) = f(2x + f(f(y))) = x + f(y) + f(x). \tag{2}$$

In (2) ergibt $x = y = 0$, dass $f(f(0)) = 2f(0)$, also folgt wegen (1) sofort $f(0) = 0$. Deshalb lautet (2) nun

$$f(2x + y) = x + f(y) + f(x). \tag{3}$$

Durch $y = 0$ und Ersetzen von x durch $2x$ in (3) erhalten wir

$$f(4x) = 2x + f(2x). \tag{4}$$

Durch $y = 2x$ in (3) erhalten wir

$$f(4x) = x + f(2x) + f(x). \tag{5}$$

Durch Kombination von (4) und (5) folgt

$$2x + f(2x) = f(4x) = x + f(2x) + f(x),$$

also $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$ ist offensichtlich eine Lösung, also die einzige.

(Gerhard Kirchner) □

Lösung 3a. Wie in Lösung 3 finden wir $f(0) = 0$ und die Gleichung (3).

Daraus folgt sofort

$$f(2x + y) - (2x + y) = f(x) + f(y) - (x + y) = f(y) + f(x) - (y + x) = f(2y + x) - (2y + x).$$

Da aber $2x + y$ und $2y + x$ unabhängig voneinander alle reellen Zahlen durchlaufen, ist $f(a) - a$ konstant und somit gleich $f(0) - 0 = 0$. Wie zuvor überprüft man sofort, dass $f(x) = x$ auch wirklich eine Lösung ist.

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 2. *Ein (konvexes) Trapez $ABCD$ heiße* gut, *wenn es einen Umkreis besitzt, die Seiten AB und CD die Parallelseiten sind und CD kürzer als AB ist. Für ein gutes Trapez $ABCD$ werden folgende Bezeichnungen festgelegt.*

- *Die durch B verlaufende Parallele zu AD schneide die Verlängerung der Seite CD im Punkt S.*
- *Die beiden Tangenten durch S an den Umkreis des Trapezes berühren diesen in E bzw. F, wobei E auf derselben Seite der Geraden CD wie A liege.*

Man gebe eine möglichst einfache äquivalente Bedingung (ausgedrückt in den Seitenlängen und/oder Winkeln des Trapezes) dafür an, dass bei einem guten Trapez $ABCD$ die zwei Winkel $\sphericalangle BSE$ und $\sphericalangle FSC$ gleich groß sind.

(Walther Janous)

Antwort. Die Winkel $\sphericalangle BSE$ und $\sphericalangle FSC$ sind genau dann gleich groß, wenn $\sphericalangle BAD = 60°$ oder $AB = AD$ gilt.

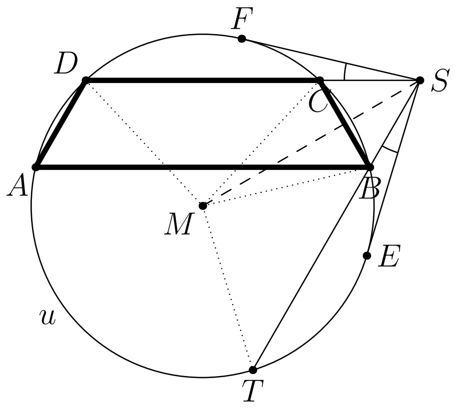

Abbildung 1: Aufgabe 2, Lösung 1, Fall 1: B zwischen S und T

Lösung 1. Wir bezeichnen den Umkreis des Trapezes mit u, den zweiten Schnittpunkt der Geraden SB mit u mit T und den Mittelpunkt von u mit M, siehe Abbildung 1. Da das Trapez einen Umkreis besitzt, ist es gleichschenklig. Da nach Konstruktion $ABSD$ ein Parallelogramm ist, gilt $BS = AD = BC$ sowie $DS = AB$.

Wir betrachten die Spiegelung an der Geraden MS. Diese bildet klarerweise E und F aufeinander ab sowie u auf sich selbst ab. Wir sagen, dass das Trapez die *Winkelbedingung* erfüllt, wenn die Winkel $\sphericalangle BSE$ und $\sphericalangle FSC$ gleich groß sind.

Das Trapez erfüllt genau dann die Winkelbedingung, wenn die Spiegelung die Strahlen SB und SC aufeinander abbildet. Das ist äquivalent dazu, dass die Schnittpunkte dieser Strahlen mit u aufeinander abgebildet werden, und zwar in der entsprechenden Anordnung.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass B zwischen S und T liegt, siehe Abbildung 1. Dann erfüllt nach obiger Überlegung das Trapez genau dann die Winkelbedingung, wenn B und C aufeinander abgebildet werden. Das ist äquivalent dazu, dass das Dreieck BSC gleichschenkelig mit Symmetrieachse SM ist. Da M als Umkreismittelpunkt jedenfalls auf der Streckensymmetrale von BC liegt, ist das äquivalent dazu, dass $CS = BS$ gilt. Da $BS = BC$ gilt, ist das äquivalent dazu, dass das Dreieck BSC gleichseitig ist. Wieder wegen $BS = BC$ ist dies äquivalent dazu, dass $\sphericalangle CSB = 60°$. Da $ABSD$ ein Paralellogramm ist, erfüllt das Trapez in diesem Fall die Winkelbedingung genau dann, wenn $\sphericalangle BAD = 60°$.

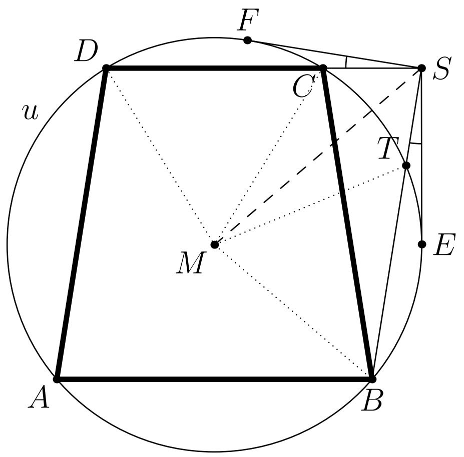

Abbildung 2: Aufgabe 2, Lösung 1, Fall 2: T zwischen S und B

Wir betrachten nun den Fall, dass T zwischen S und B liegt, siehe Abbildung 2. Dann erfüllt nach obiger Überlegung das Trapez genau dann die Winkelbedingung, wenn B und D aufeinander abgebildet werden. Das ist äquivalent dazu, dass das Dreieck BSD gleichschenkelig mit Symmetrieachse MS ist. Nach demselben Argument wie im ersten Fall ist das äquivalent zu $SB = SD$. Das ist genau dann der

Fall, wenn $AB = AD$.

(Clemens Heuberger) $\square$

Bemerkung. Die zur Winkelbedingung äquivalente Gleichung $CS = BS$ bzw. $CS = TS$ lässt sich auch damit begründen, dass die beiden Tangenten um denselben Winkel nach innen gedreht werden.

(Theresia Eisenkölbl)

Lösung 1a. Die Winkelbedingung ist äquivalent dazu, dass die Winkelsymmetrale von CSB durch den Mittelpunkt M des Umkreises des Trapezes geht. Weiters bemerken wir noch, dass ein Trapez mit Umkreis gleichschenklig ist.

Für das Dreieck BMS und die beiden verschiedenen Dreiecke CMS und DMS gilt, dass zwei der Seiten gleich sind (nämlich $BM = CM = DM$ und $MS = MS = MS$), und ein Winkel genau dann gleich ist (nämlich $\sphericalangle MSB = \sphericalangle CSM = \sphericalangle DSM$), wenn die Winkelbedingung gilt. Daher ist dann das Dreieck BMS zu einem der beide Dreiecke kongruent und bildet gemeinsam mit dem anderen ein Sehnenviereck. (Das kann man zum Beispiel mit dem Sinussatz überprüfen.)

Die Entscheidung, welche Dreiecke man in welchem Fall behandelt, führt auf vier Beweisvarianten. In dieser Lösung betrachten wir beide mögliche Kongruenzfälle (das ist sehr ähnlich zu Lösung 1, aber ohne Einführung des Punktes T), in Lösung 1b betrachten wir beide mögliche Sehnenvierecke. Die zwei Beweisvarianten, in denen man für eines der beiden Dreiecke CMS und DMS die beiden möglichen Fälle (kongruent bzw. Ergänzung zu Sehnenviereck) behandelt, ergeben sich sofort aus den entsprechenden Teilen dieser beiden Lösungen.

- Fall 1: Die Dreiecke BMS und CMS sind kongruent. Wie in Lösung 1 ist das äquivalent zu $CS = BS = BC$ und damit zu $\sphericalangle BAD (= \sphericalangle CSB) = 60°$.
- Fall 2: Die Dreiecke BMS und DMS sind kongruent. Das ist klarerweise äquivalent zu $BS = DS$ und damit $AD = AB$.

(Theresia Eisenkölbl) $\square$

Lösung 1b. Wie in Lösung 1a beschrieben, ist die Winkelbedingung äquivalent dazu, dass eines der beiden Vierecke $MBSC$ und $MBSD$ ein Sehnenviereck ist.

- Fall 1: Das Viereck $MBSC$ ist ein Sehnenviereck.

  Das ist wegen des Peripheriewinkelsatzes in $MBSC$ und des Zentriwinkelsatzes für $\sphericalangle BAC$ im Umkreis des Trapezes äquivalent zu $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CSB = 180° - \sphericalangle BMC = 180° - 2\sphericalangle BAC$ und damit über die Winkelsumme in ABC und Symmetrie des Trapezes äquivalent zu

  $$\sphericalangle ACB = 180° - \sphericalangle CBA - \sphericalangle BAC = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAC,$$

  was genau $AB = BC$ entspricht.
- Fall 2: Das Viereck $MBSD$ ist ein Sehnenviereck.

  Das ist wegen des Peripheriewinkelsatzes in $MBSD$ und des Zentriwinkelsatzes für $\sphericalangle BAD$ im Umkreis des Trapezes äquivalent zu $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DSB = 180° - \sphericalangle BMD = 180° - 2\sphericalangle BAD$, also $\sphericalangle BAD = 60°$.

(Theresia Eisenkölbl) $\square$

Aufgabe 3. *In Oddland gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 3 Cent, 5 Cent usw., wobei es für jede ungerade Zahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Die Post von Oddland schreibt vor: Für je zwei verschiedene Werte muss auf einem Brief die Anzahl der Marken des niedrigeren Wertes mindestens so groß sein wie die Anzahl der Marken des höheren Wertes.*

In Squareland hingegen gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 4 Cent, 9 Cent usw., wobei es für jede Quadratzahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Marken können in Squareland beliebig ohne weitere Vorschriften kombiniert werden.

Man beweise für jede positive ganze Zahl n: In den beiden Ländern gibt es gleich viele Möglichkeiten, einen Brief vorschriftsgemäß mit Marken im Gesamtwert von n Cent zu frankieren. Dabei macht es keinen Unterschied, wenn man dieselben Briefmarken auf einem Brief anders anordnet.

(Stephan Wagner)

Lösung 1. Wir stellen Marken mit Wert w als Rechtecke der Form $1 \times w$ dar. Der Wert einer Frankierung entspricht der Fläche einer aus solchen Marken gelegten Figur.

Wir können jede gültige Frankierung von Oddland wie folgt in eine gültige Frankierung in Squareland verwandeln:

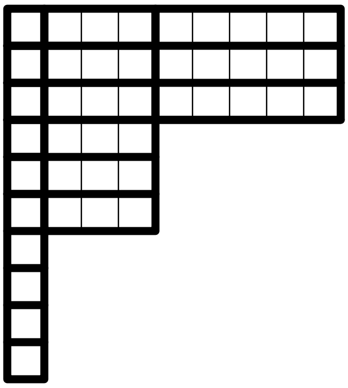

Abbildung 3: Aufgabe 3, Lösung 1

Wir legen alle 1-Cent-Marken untereinander, siehe Abbildung 3. Dann legen wir von oben beginnend in jeder Zeile eine 3-Cent-Marke daneben, bis wir alle solchen Marken untergebracht haben. Da es höchstens gleich viele 3-Cent-Marken wie 1-Cent-Marken gibt, kann jede davon neben eine 1-Cent-Marke gelegt werden. Analog legen wir die 5-Cent-Marken von oben beginnend neben die 3-Cent-Marken, und so weiter.

Als Längen der dabei entstehenden Zeilen können nur 1, 4, 9, ..., auftreten, da für jede positive ganze Zahl k die Summe der ersten k ungeraden Zahlen gleich k^2 ist. Wir können daher für jede Zeile eine Marke aus Squareland wählen und erhalten eine in Squareland gültige Frankierung mit demselben Wert.

Umgekehrt wandeln wir eine gültige Frankierung von Squareland wie folgt in eine Frankierung in Oddland um:

Wir legen die Marken aus Squareland übereinander, siehe Abbildung 4. Da jede Quadratzahl k^2 als Summe der ersten k ungeraden Zahlen darstellbar ist, können wir die Marken rechts von der ersten, vierten, neunten, ..., Spalte zerschneiden und erhalten lauter gültige Marken aus Oddland. Da von links nach rechts betrachtet jede Spalte höchstens gleich viele belegte Felder wie die vorherige hat, ergibt sich auch sofort, dass die in Oddland gültigen Bedingungen an die Markenanzahlen erfüllt sind.

Da diese beiden Abbildungen zueinander invers sind (wenn man eine Frankierung aus Oddland mit der ersten Methode in eine aus Squareland verwandelt und mit der zweiten wieder zurück, dann erhält man dieselbe Frankierung, und umgekehrt) liegt eine Bijektion vor, daher existieren genau gleich viele gültige Frankierungen.

(Birgit Vera Schmidt, Stephan Wagner) □

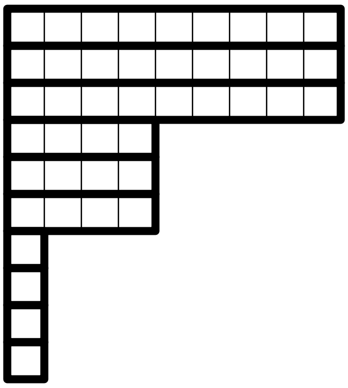

Abbildung 4: Aufgabe 3, Lösung 1

Lösung 1a. Dieselbe Idee wie in Lösung 1 lässt sich statt graphisch auch rechnerisch durchführen:

Nehmen wir an, wir haben eine gültige Frankierung für Squareland mit a_1 Marken vom Wert 1 Cent, a_2 Marken vom Wert 4 Cent, und so weiter, bis a_M Marken vom Wert M^2 Cent. Die Summe dieser Marken habe den Wert n Cent, also

$$n = \sum_{k=1}^{M} k^2 a_k.$$

Nun stellen wir jedes k^2 als $\sum_{j=1}^{k}(2j-1)$ dar und vertauschen die Summationsreihenfolge, wodurch wir

$$n = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{k}(2j-1)a_k = \sum_{j=1}^{M}(2j-1)\sum_{k=j}^{M} a_k$$

erhalten. Dies gibt uns eine gültige Frankierung für Oddland, indem wir $b_j = \sum_{k=j}^{M} a_k$ setzen und

$$n = \sum_{j=1}^{M}(2j-1)b_j$$

erhalten, was wir als b_1 Marken vom Wert 1 Cent, b_2 Marken vom Wert 3 Cent, und so weiter, bis b_M Marken vom Wert $2M-1$ Cent interpretieren. Gemäß der Definition der b_j gilt auch wie gefordert $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_M$, da $b_j - b_{j+1} = a_j \geq 0$ für $1 \leq j < M$ gilt.

Haben wir umgekehrt eine Frankierung von Oddland gegeben, so können wir $a_1 \coloneqq b_1 - b_2$, $a_2 \coloneqq b_2 - b_3$, …, $a_{M-1} \coloneqq b_{M-1} - b_M$, $a_M = b_M$ setzen, um auf dem umgekehrten Rechenweg eine gültige Frankierung in Squareland herzustellen.

Diese beiden Operationen sind offensichtlich Umkehrungen voneinander, deswegen haben wir eine Bijektion gefunden, was die Aussage beweist.

(Stephan Wagner) □

Bemerkung. Die Anzahl der möglichen Frankierungen für kleine Werte von n sowie viele weiterführende Links und zusätzliche Eigenschaften finden sich in der „On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ (OEIS) unter `https://oeis.org/A001156`.

Aufgabe 4. *Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a+b+c+2 = abc$.*

Man beweise

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 27.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

Antwort. Gleichheit ergibt sich genau dann, wenn $a = b = c = 2$.

Lösung 1. Wir setzen $x = a + 1$, $y = b + 1$ und $z = c + 1$ und haben

$$xyz \geq 27$$

unter der Nebenbedingung

$$xyz = xy + yz + zx$$

zu zeigen.

Aus der Nebenbedingung erhalten wir mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung für die positiven Zahlen xy, yz und zx, dass

$$xyz = xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$

was wegen $xyz > 0$ zu $xyz \geq 27$ äquivalent ist.

Gleichheit gilt genau dann, wenn $xy = yz = zx$ erfüllt ist. Das ist zu $x = y = z$ äquivalent, was aufgrund der Nebenbedingung (setzt man $x = y = z$ in die Nebenbedingung ein, erhält man $x^3 = 3x^2$) zu $x = y = z = 3$ und damit $a = b = c = 2$ äquivalent ist.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 2. Die zu beweisende Ungleichung ist äquivalent zur Ungleichung

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 27,$$

also (wegen der Nebenbedingung) zu

$$2a + 2b + 2c + ab + bc + ca \geq 24.$$

Mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung ergibt sich

$$2a + 2b + 2c + ab + bc + ca \geq 6 \cdot \sqrt[6]{2^3a^3b^3c^3} = 6 \cdot \sqrt{2abc}. \tag{6}$$

Aus der Nebenbedingung folgt mit der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung

$$abc = a + b + c + 2 \geq 4\sqrt[4]{2abc},$$

das ist äquivalent zu

$$(abc)^4 \geq 2^9abc.$$

Wegen $abc > 0$ folgt daraus $abc \geq 8$. Verwendet man diese Abschätzung in (6), so erhält man

$$2a + 2b + 2c + ab + bc + ca \geq 6 \cdot \sqrt{2abc} \geq 6 \cdot \sqrt{2 \cdot 8} = 24$$

und alles ist gezeigt. Gleichheit ergibt sich genau dann, wenn $2a = 2b = 2c = ab = bc = ac$ und $abc = 8$ gelten (was seinerseits zu $a = b = c = 2$ äquivalent ist), also genau für $a = b = c = 2$.

(Karl Czakler) □

Lösung 3. Wie in Lösung 2 erhält man $abc \geq 8$. Wir zeigen, dass sich bereits aus dieser Bedingung die behauptete Ungleichung herleiten lässt.

Wegen $c \geq \frac{8}{ab}$ haben wir

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (a+1)(b+1)\left(\frac{8}{ab} + 1\right) = \frac{a^2b^2 + (a+b)(ab+8) + 8}{ab} + 9.$$

Deshalb müssen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\frac{a^2b^2 + (a+b)(ab+8) + 8}{ab} \geq 18 \\ \iff\quad &a^2b^2 + (a+b)(ab+8) + 8 \geq 18ab \end{aligned}$$

nachweisen. Wegen $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ genügt der Nachweis von

$$a^2b^2 + 2\sqrt{ab}(ab+8) + 8 \geq 18ab.$$

Dafür setzen wir $ab = w^2$ und es bleibt für $w > 0$ die Ungleichung

$$w^4 + 2w(w^2+8) + 8 \geq 18w^2$$

zu verifizieren. Die Zerlegung $w^4 + 2w^3 - 18w^2 + 16w + 8 = (w-2)^2(w^2+6w+2)$ schließt den Beweis ab.

Wenn Gleichheit gilt, muss bereits in der Abschätzung $abc \geq 8$ Gleichheit gelten, woraus sich wie in Lösung 2 $a = b = c = 2$ ergibt. Man überprüft leicht, dass dann tatsächlich Gleichheit gilt.

(Walther Janous) □

Lösung 4. Wie in Lösung 1 ist $xyz \geq 27$ unter der Nebenbedingung $xyz = xy + yz + zx$ zu zeigen; zusätzlich wissen wir $x > 1$, $y > 1$, $z > 1$.

Sei $M \coloneqq \{(x,y,z) \in [1,\infty)^3 \mid xyz = xy + yz + zx\}$. Wir lassen $x = 1$ oder $y = 1$ oder $z = 1$ zwar aus formalen Gründen zu, halten aber fest, dass in diesen Fällen die Bedingung nicht gelten kann und diese Werte daher in M nicht als Koordinaten auftreten. Man überprüft leicht, dass M abgeschlossen ist. Sei $f\colon [1,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x,y,z) \mapsto xyz$. Wir haben das Minimum von f auf M zu bestimmen.

Wenn eine der Variablen größer als 28 ist, so ist $xyz > 28$, weshalb wir uns für die Lösung der Aufgabe auf die Bestimmung des Minimums von f auf der Menge $M_0 \coloneqq M \cap K$ beschränken können, wobei $K = [1,28]^3$. Da f eine stetige Funktion ist und M_0 als Schnitt der abgeschlossenen Menge M mit der kompakten Menge K selbst kompakt ist, nimmt f auf M_0 ein globales Minimum an. Wenn dieses am Rand von K angenommen wird (wobei wir hier angesichts oben diskutierter Eigenschaft von M nur jene Ränder von K betrachten müssen, auf denen mindestens eine der Variablen gleich 28 ist), so ist das Minimum mindestens 28 und die Aufgabe ist gelöst. Andernfalls ist das globale Minimum im Inneren von K.

Wir bestimmen die möglichen Stellen lokaler Extrema im Inneren von K mit der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} yz + \lambda(yz - y - z) &= 0, \\ zx + \lambda(zx - z - x) &= 0, \\ xy + \lambda(xy - x - y) &= 0. \end{aligned}$$

Nach Division durch yz, zx bzw. xy erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 + \lambda\Bigl(1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{y}\Bigr) &= 0, \\ 1 + \lambda\Bigl(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{z}\Bigr) &= 0, \\ 1 + \lambda\Bigl(1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\Bigr) &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda \neq 0$ und $1/x = 1/y = 1/z$, also $x = y = z$. Aus der Nebenbedingung folgt $x^3 = 3x^2$, also $x = 3$. Tatsächlich gilt dann $xyz = 27$. Außerdem haben wir den einzig möglichen Gleichheitsfall $x = y = z = 3$ erhalten.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 5. Aus der Nebenbedingung erhalten wir

$$c = \frac{a+b+2}{ab-1},$$

also insbesondere $ab > 1$, und damit

$$c+1 = \frac{a+b+2+ab-1}{ab-1} = \frac{(a+1)(b+1)}{ab-1}.$$

Es reicht daher

$$\frac{(a+1)^2(b+1)^2}{ab-1} \geq 27$$

für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $ab > 1$ nachzuweisen, also die Ungleichung

$$(a+1)^2(b+1)^2 \geq 27(ab-1)$$

zu zeigen, die äquivalent zu

$$a^2(b+1)^2 + a(2b^2 - 23b + 2) + b^2 + 2b + 28 \geq 0$$

ist. Wir betrachten dies als eine quadratische Ungleichung in der Variablen a. Ihr linksseitiger Ausdruck ist für alle $b > 0$ eine nach oben offene Parabel mit Diskriminante

$$\Delta(b) = (2b^2 - 23b + 2)^2 - 4(b+1)^2(b^2 + 2b + 28) = -27(4b^3 - 15b^2 + 12b + 4).$$

Wegen $\Delta(b) = -27(4b+1)(b-2)^2$ ergibt sich $\Delta(b) \leq 0$. Deshalb kann der Graph der Parabel die horizontale Achse nicht schneiden, sondern höchstens berühren. Letzteres tritt genau für $b = 2$ ein, woraus unschwer $a = 2$ folgt. Mit der Nebenbedingung erhält man noch $c = 2$. Man überprüft leicht, dass für $a = b = c = 2$ tatsächlich Gleichheit gilt.

(Walther Janous) □

Lösung 6. Wie in vielen anderen Aufgaben mit Nebenbedingung ist es möglich, die Rolle von Nebenbedingung und zu zeigender Ungleichung zu vertauschen. Wir zeigen also stattdessen

Lemma. Es seien A, B und C positive reelle Zahlen mit $(A+1)(B+1)(C+1) = 27$. Dann gilt $A + B + C + 2 \geq ABC$ mit Gleichheit für $A = B = C = 2$.

Wir zeigen zunächst, dass aus dem Lemma die Aufgabe folgt:
Der Gleichheitsfall ist natürlich derselbe und es gilt dann $a = b = c = 2$.

Wir nehmen nun an, für positive reelle Zahlen mit $a+b+c+2 = abc$ würde $(a+1)(b+1)(c+1) < 27$ gelten. Dann können wir a solange vergrößern, bis für ein a' die Ungleichung zur Gleichung wird. Da aber aus der Nebenbedingung natürlich wegen $abc = a+b+c+2 > a$ auch $bc > 1$ folgt, wird dort durch Vergrößern von a das Produkt abc größer als $a + b + c + 2$ und es gilt somit $(a'+1)(b+1)(c+1) = 27$ und $a' + b + c + 2 < a'bc$ im Widerspruch zum Lemma. Somit war die Annahme falsch und alles ist mit Hilfe des Lemmas bewiesen.

Beweis des Lemmas. Wir setzen $x = A + 1$, $y = B + 1$ und $z = C + 1$. Damit wird die Nebenbedingung zu $xyz = 27$ und die zu beweisende Ungleichung zu $(x-1)+(y-1)+(z-1)+2 \geq (x-1)(y-1)(z-1)$, die äquivalent zu

$$xy + xz + yz \geq xyz$$

ist. Das folgt aber sofort aus der arithmetisch-geometrischen Mittelungleichung

$$\frac{xy + xz + yz}{3} \geq \sqrt[3]{(xyz)^2} = \sqrt[3]{27^2} = 9 = \frac{xyz}{3}.$$

Gleichheit gilt genau für $xy = xz = yz$, also $x = y = z$ mit der Nebenbedingung $x^3 = 27$, also $x = y = z = 3$, was genau $A = B = C = 2$ entspricht. ■

(Theresia Eisenkölbl) □

Aufgabe 5. *Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Es seien D und E die Höhenfußpunkte auf den Seiten BC bzw. AC. Auf den Strecken AD und BE liegen die Punkte F bzw. G derart, dass*

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE}$$

gilt. Die Gerade durch C und F schneide BE im Punkt H, und die Gerade durch C und G schneide AD im Punkt I.

Man beweise, dass die Punkte F, G, H und I auf einem Kreis liegen.

(Walther Janous)

Lösung 1. Die zwei Dreiecke ADC und BEC sind zueinander ähnlich, vergleiche Abbildung 5. Dabei

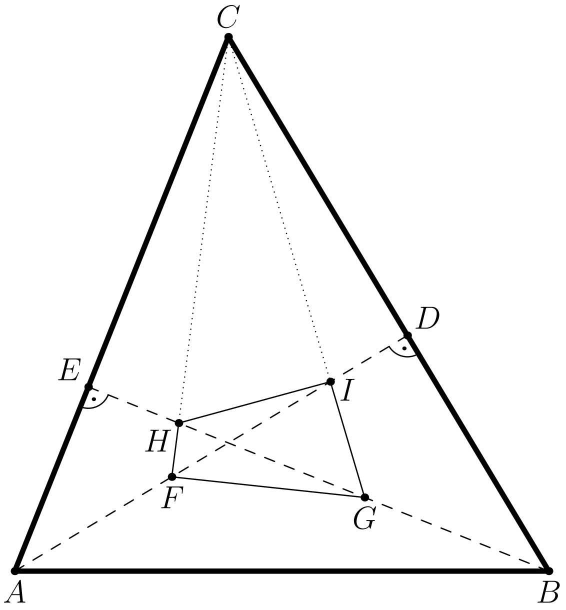

Abbildung 5: Aufgabe 5, Lösung 1

entsprechen die Seiten AD und BE einander. Die Bedingung $\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE}$ bedeutet, dass die Punkte F und G die zwei Seiten AD bzw. BE im gleichen Verhältnis teilen. Deshalb sind die zwei Winkel $\sphericalangle DFC$ und $\sphericalangle CGE$ gleich groß, weshalb auch die gerichteten Winkel $\sphericalangle IFH$ und $\sphericalangle IGH$ modulo 180° gleich groß sind. Aus der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes ergibt sich, dass die Punkte F, G, H und I auf einem Kreis liegen.

(Walther Janous) □

Lösung 2. Laut Voraussetzung gilt

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE} \tag{7}$$

und daher auch

$$\frac{AF}{AD} = \frac{BG}{BE} \tag{8}$$

Über Invarianz von Doppelverhältnissen erhalten wir

$$\frac{AF}{FD} \cdot \frac{ID}{AI} = (A, D; F, I) = (E, B; H, G) = \frac{EH}{HB} \cdot \frac{GB}{EG}.$$

und mit (7) auch

$$\frac{ID}{AI} = \frac{EH}{HB}$$

und damit auch

$$\frac{ID}{AD} = \frac{EH}{EB}. \tag{9}$$

Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BE und AD mit M. Wir verwenden weitere Invarianzen von Doppelverhältnissen und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{HM}{MB} \cdot \frac{EB}{HE} &= (H, B; M, E) = (F, D; M, A) = \frac{FM}{MD} \cdot \frac{AD}{FA} \\
\frac{MG}{GB} \cdot \frac{EB}{ME} &= (M, B; G, E) = (M, D; I, A) = \frac{MI}{ID} \cdot \frac{AD}{MA}.
\end{aligned}$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{HM \cdot MG \cdot EB \cdot EB}{MB \cdot ME \cdot GB \cdot HE} = \frac{FM \cdot MI \cdot AD \cdot AD}{MD \cdot MA \cdot FA \cdot ID} \tag{10}$$

Da $ABDE$ wegen $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$ ein Sehnenviereck ist, erhalten wir über den Sehnensatz bezüglich M und des Kreises $ABDE$, dass

$$MA \cdot MD = ME \cdot MB. \tag{11}$$

Aus (10), (8), (9) und (11) folgt

$$HM \cdot MG = FM \cdot MI,$$

damit ist nach der Umkehrung des Sehnensatzes auch $HFGI$ ein Sehnenviereck.

(Clemens Heuberger) □

Bemerkung. Beide Lösungen verwenden nur, dass $ABDE$ ein Sehnenviereck ist.

Aufgabe 6. *Man bestimme die kleinstmögliche positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Für alle positiven ganzen Zahlen x, y und z mit $x \mid y^3$ und $y \mid z^3$ und $z \mid x^3$ gilt immer auch $xyz \mid (x + y + z)^n$.*

(Gerhard J. Woeginger)

Antwort. Die kleinstmögliche solche Zahl ist $n = 13$.

Lösung 1. Wir halten fest, dass genau dann $xyz \mid (x + y + z)^n$ gilt, wenn für jede Primzahl p die Ungleichung

$$v_p(xyz) \leq v_p((x + y + z)^n)$$

erfüllt ist, wobei wie üblich $v_p(m)$ den Exponenten von p in der Primfaktorzerlegung von m bezeichnet.

Seien x, y und z positive ganze Zahlen mit $x \mid y^3$, $y \mid z^3$ und $z \mid x^3$. Es sei p eine beliebige Primzahl, und o. B. d. A. sei die Vielfachheit von p in z am geringsten, also $v_p(z) = \min\{v_p(x), v_p(y), v_p(z)\}$.

Dann gilt einerseits $v_p(x + y + z) \geq v_p(z)$, andererseits folgt aus den Teilbarkeitsrelationen $v_p(x) \leq 3v_p(y) \leq 9v_p(z)$. Insgesamt erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
v_p(xyz) &= v_p(x) + v_p(y) + v_p(z) \\
&\leq 9v_p(z) + 3v_p(z) + v_p(z) = 13v_p(z) \\
&\leq 13v_p(x + y + z) = v_p((x + y + z)^{13}),
\end{aligned} \tag{12}$$

womit die geforderte Eigenschaft für $n = 13$ jedenfalls erfüllt ist.

Es bleibt zu zeigen, dass dies bereits die kleinstmögliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Sei dazu n nun eine Zahl, die die gewünschte Eigenschaft hat. Setzen wir $(x, y, z) = (p^9, p^3, p^1)$ für eine Primzahl p (um zu erreichen, dass beide Ungleichungen in (12) mit Gleichheit erfüllt sind), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
13 &= v_p(p^{13}) = v_p(p^9 \cdot p^3 \cdot p^1) = v_p(xyz) \\
&\leq v_p((x + y + z)^n) = v_p((p^9 + p^3 + p^1)^n) = n \cdot v_p(p(p^8 + p^2 + 1)) = n.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $n \geq 13$ gezeigt.

Bemerkung. Tatsächlich besitzen sogar alle $n \geq 13$ diese Eigenschaft, da $(x+y+z)^n$ dann ein Vielfaches von $(x+y+z)^{13}$ ist.

(Birgit Vera Schmidt, Gerhard Woeginger) □

Lösung 1a. Die Ungleichung $v_p((x+y+z)^n) \geq n \cdot v_p(z)$ aus Lösung 1 lässt sich alternativ auch wie folgt zeigen.

Multipliziert man $(x+y+z)^n$ aus, so erhält man eine Summe von Termen der Form $x^a y^b z^c$ mit ganzzahligen Exponenten a, b, $c \geq 0$ und mit $a+b+c=n$, und für jeden davon gilt

$$\begin{aligned} v_p(x^a y^b z^c) &= av_p(x) + bv_p(y) + cv_p(z) \\ &\geq av_p(z) + bv_p(z) + cv_p(z) = nv_p(z). \end{aligned}$$

Auch für die Summe solcher Terme gilt daher

$$v_p((x+y+z)^n) \geq nv_p(z).$$

(Birgit Vera Schmidt, Gerhard Woeginger) □

Lösung 1b. Wie in Lösung 1 sehen wir, dass $n \geq 13$ gelten muss.

Um zu zeigen, dass $n = 13$ tatsächlich die gewünschte Eigenschaft hat, multiplizieren wir $(x+y+z)^{13}$ wie in Lösung 1a aus und haben nun $xyz \mid x^a y^b z^c$ für alle nicht-negativen ganzen Zahlen a, b und c mit $a+b+c=13$ zu zeigen. Falls alle drei Exponenten positiv sind, ist das klar. Andernfalls gilt angesichts der zyklischen Angabe ohne Beschränkung der Allgemeinheit $c = 0$.

Somit müssen wir nur mehr die Fälle mit $a + b = 13$ betrachten.

- Wenn $b = 0$, so nutzen wir $y \mid x^9$ und $z \mid x^3$ und erhalten $xyz \mid x^{1+9+3} = x^{13}$ wie gefordert.
- Wenn $1 \leq b \leq 9$, so gilt $a \geq 4$ und wir nutzen $x \mid x$, $y \mid y$ sowie $z \mid x^3$ und erhalten $xyz \mid x^4 y$ wie gefordert.
- Wenn $10 \leq b \leq 12$, so gilt $a \geq 1$ und wir nutzen $x \mid x$, $y \mid y$ und $z \mid y^9$ und erhalten $xyz \mid xy^{10}$ wie gefordert.
- Wenn $b = 13$, so nutzen wir $x \mid y^3$, $y \mid y$ und $z \mid y^9$ und erhalten $xyz \mid y^{13}$ wie gefordert.

(Clemens Heuberger) □

Lösung 1c. Dass $n \geq 13$ gelten muss, lässt sich auch wie folgt zeigen. Sei n der gesuchte minimale Wert. Wir setzen $y = z^3$ und $x = y^3 = z^9$ in die Teilbarkeitsbedingung für n ein, da dann zwei der vorausgesetzten Teilbarkeiten zu Identitäten werden (und der andere Extremfall $x = y = z$ keine Restriktionen an n liefert).

Die Teilbarkeitsbedingung wird zu

$$z^{13} \mid (z + z^3 + z^9)^n = z^n(1 + z^2 + z^8)^n.$$

Da der Term in Klammern auf der rechten Seite teilerfremd zu z ist, folgt daraus $z^{13} \mid z^n$ und durch Wahl eines beliebigen $z > 1$ sofort $13 \leq n$.

(Theresia Eisenkölbl) □