56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

3. Mai 2025

1. Es seien a, b und c paarweise verschiedene nichtnegative reelle Zahlen. Man beweise, dass

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\right)>4$$

gilt.

(Karl Czakler)

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $BC > AC$. Sei S der Schwerpunkt von ABC und sei F der Fußpunkt der Höhe von C auf die Seite AB. Die Schwerlinie CS schneide den Umkreis k von ABC ein weiteres Mal in P. Sie schneide weiters AB in M. Die Gerade SF schneide den Umkreis k in Q, sodass F zwischen S und Q liegt.

   Man zeige, dass die Punkte M, P, Q und F auf einem Kreis liegen.

(Karl Czakler)

3. Für eine positive ganze Zahl n betrachten wir das folgende Spiel: Auf einer Tafel stehen zu Beginn die Zahlen $1, 2, \ldots, n$. In jedem Schritt werden zwei Zahlen auf der Tafel ausgewählt, deren Differenz noch auf der Tafel steht. Diese Differenz wird dann von der Tafel gelöscht.

   (Wenn zum Beispiel auf der Tafel die Zahlen 3, 6, 11 und 17 stehen, dann kann 3 als $6-3$ oder 6 als $17-11$ oder 11 als $17-6$ gelöscht werden.)

   Für welche n ist es möglich, mit solchen Schritten zu erreichen, dass nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht?

(Michael Reitmeir)

4. Man bestimme alle ganzen Zahlen z, die sich in der Form

$$z=\frac{a^2-b^2}{b}$$

darstellen lassen, wobei a und b positive ganze Zahlen sind.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.