55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

27. April 2024

1. Es seien α und β reelle Zahlen mit $\beta \neq 0$. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass
$$f(\alpha f(x) + f(y)) = \beta x + f(y)$$
für alle reellen x und y gilt.

(Walther Janous)

2. Es sei h ein Halbkreis über der Strecke AB. Die zwei Kreise k_1 und k_2, $k_1 \neq k_2$, berühren die Strecke AB in den Punkten C bzw. D sowie den Halbkreis h von innen in den Punkten E bzw. F. Man beweise, dass die vier Punkte C, D, E und F auf einem Kreis liegen.

(Walther Janous)

3. Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Ein *Kreistanz* ist ein Tanz, der nach folgender Vorschrift durchgeführt wird: Am Boden werden entlang eines großen Kreises n Punkte in gleichen Abständen markiert. Bei jedem dieser Punkte liegt ein Blatt Papier mit einem Pfeil, der entweder in oder gegen den Uhrzeigersinn zeigt. Einer der Punkte ist mit „Start“ beschriftet. Der Tänzer beginnt an diesem Punkt. In jedem Schritt wechselt er zuerst die Richtung des Pfeiles, bei dem er steht, und geht dann zum nächsten Punkt in der neuen Pfeilrichtung.

   a) Man zeige: Jeder Kreistanz besucht jeden Punkt unendlich oft.

   b) Wie viele verschiedene Kreistänze gibt es? Zwei Kreistänze werden als gleich betrachtet, wenn sie sich nur durch endlich viele Schritte zu Beginn unterscheiden und dann für immer dieselben Punkte in derselben Reihenfolge besuchen. (Die gemeinsame Schrittfolge darf dabei in den beiden Tänzen zu verschiedenen Zeitpunkten beginnen.)

(Birgit Vera Schmidt)

4. Eine positive ganze Zahl heißt *mächtig*, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung alle Exponenten ≥ 2 sind.

   Man beweise, dass es unendlich viele Paare mächtiger aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen gibt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.