53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

30. April 2022

1. Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z die Doppelungleichung

$$0 < \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \frac{1}{8}$$

gilt.

Wann gilt in der rechten Ungleichung Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Die Punkte A, B, C, D liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis mit Mittelpunkt O. Weiters sollen die Geraden AC und BD aufeinander normal stehen. Der Fußpunkt des Lotes von O auf AB sei F.

Man beweise $CD = 2 \cdot OF$.

(Karl Czakler)

3. Bei jeder ganzen Zahl auf dem Zahlenstrahl von 0 bis 2022 steht zu Beginn eine Person.

In jedem Zug werden zwei Personen mit Abstand mindestens 2 ausgewählt. Diese gehen jeweils um 1 aufeinander zu.

Wenn kein solcher Zug mehr möglich ist, endet der Vorgang.

Man zeige, dass dieser Vorgang immer nach endlich vielen Zügen endet, und bestimme alle möglichen Konfigurationen, wo die Personen am Ende stehen können. (Dabei ist für jede Konfiguration nur von Interesse, wie viele Personen bei jeder Zahl stehen.)

(Birgit Vera Schmidt)

4. Man bestimme alle Tripel (p, q, r) von Primzahlen, für die $4q - 1$ eine Primzahl ist und

$$\frac{p+q}{p+r} = r - p$$

erfüllt ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.