52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

1. Mai 2021

1. Seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a + b + c = 1$.

   Man beweise
   $$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{6c+1} \leq \frac{1}{2}.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

2. Seien ABC ein Dreieck und X der Punkt, der auf der Verlängerung der Seite AC über A hinaus so liegt, dass $AX = AB$. Sei analog Y der Punkt, der auf der Verlängerung der Seite BC über B hinaus so liegt, dass $BY = AB$.

   Man zeige, dass die Umkreise von ACY und BCX einander ein zweites Mal in einem Punkt ungleich C auf der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BCA$ schneiden.

   (Theresia Eisenkölbl)

3. Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Auf einem Kreis liegen n Punkte. Jeder dieser Punkte wird mit einer reellen Zahl beschriftet, die höchstens 1 ist. Dabei sei jede Zahl gleich dem Absolutbetrag der Differenz der zwei Zahlen, die im Uhrzeigersinn unmittelbar davor stehen.

   Man bestimme in Abhängigkeit von n den größtmöglichen Wert, den die Summe aller Zahlen annehmen kann.

   (Walther Janous)

4. Auf einer Tafel stehen 17 ganze Zahlen, von denen keine durch 17 teilbar ist. Alice und Bob spielen ein Spiel, bei dem Alice beginnt und bei dem sie abwechselnd folgende Schritte durchführen:

   - Alice sucht sich eine Zahl a auf der Tafel aus und ersetzt diese durch a^2.
   - Bob sucht sich eine Zahl b auf der Tafel aus und ersetzt diese durch b^3.

   Alice gewinnt, wenn nach endlich vielen Schritten die Summe der Zahlen auf der Tafel ein Vielfaches von 17 ist.

   Man beweise, dass Alice immer den Sieg erzwingen kann.

   (Daniel Holmes)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.