51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

21. Mai 2020

1. Seien x, y und z positive reelle Zahlen, für die $x \geq y + z$ gilt.

   Man beweise die Ungleichung

   $$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 7.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Walther Janous)

2. Sei ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in C und Umkreismittelpunkt U. Auf den Seiten AC und BC liegen die Punkte D bzw. E derart, dass $\sphericalangle EUD = 90°$ gilt. Seien F und G die Lotfußpunkte von D bzw. E auf AB.

   Man beweise, dass FG halb so lang wie AB ist.

   (Walther Janous)

3. Auf einer Tafel stehen drei positive ganze Zahlen. In jedem Schritt wird zuerst eine Bezeichnung der Zahlen mit a, b und c so gewählt, dass $a > \operatorname{ggT}(b, c)$ gilt, und dann wird die Zahl a durch $a - \operatorname{ggT}(b, c)$ ersetzt. Das Spiel endet, wenn es keine Bezeichnung mit der geforderten Eigenschaft gibt.

   Man zeige, dass das Spiel immer endet und dass die drei Zahlen, die am Ende auf der Tafel stehen, nur von den Anfangszahlen abhängen, jedoch nicht vom Spielablauf.

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen N, für die $2^N - 2N$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.