50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Vorrunde

4. Mai 2019

1. Wir betrachten die zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ ganzer Zahlen, die durch $a_0 = b_0 = 2$ und $a_1 = b_1 = 14$ und durch

$$a_n = 14a_{n-1} + a_{n-2},$$
$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2}$$

für $n \geq 2$ festgelegt sind.

Man entscheide, ob es unendlich viele Zahlen gibt, die in beiden Folgen vorkommen.

(Gerhard Woeginger)

2. Es sei ABC ein Dreieck und I sein Inkreismittelpunkt. Der Kreis durch A, C und I schneide die Gerade BC ein zweites Mal im Punkt X, der Kreis durch B, C und I schneide die Gerade AC ein zweites Mal im Punkt Y.

Man zeige, dass die Strecken AY und BX gleich lang sind.

(Theresia Eisenkölbl)

3. Es sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Ariane und Bérénice spielen ein Spiel auf der Menge der Restklassen modulo n. Zu Beginn steht auf einem Zettel die Restklasse 1. In jedem Spielzug ersetzt die Spielerin, die am Zug ist, die aktuelle Restklasse x entweder durch $x+1$ oder durch $2x$. Die beiden Spielerinnen wechseln sich ab, wobei Ariane beginnt.

Ariane hat gewonnen, wenn im Laufe des Spiels die Restklasse 0 erreicht wird. Bérénice hat gewonnen, wenn sie das dauerhaft verhindern kann.

Man bestimme in Abhängigkeit von n, wer von beiden eine Gewinnstrategie hat.

(Theresia Eisenkölbl)

4. Man bestimme alle Paare (a, b) reeller Zahlen, sodass

$$a \cdot \lfloor b \cdot n \rfloor = b \cdot \lfloor a \cdot n \rfloor$$

für alle positiven ganzen Zahlen n gilt.

(Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.)

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.