49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

28. April 2018

1. Es sei α eine positive reelle Zahl. Man bestimme für dieses α die größte reelle Zahl C derart, dass für alle positiven reellen Zahlen x, y und z mit $xy + yz + zx = \alpha$ die Ungleichung
$$\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{y^2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{z^2}\right) \geq C \cdot \left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2\right)$$
gilt. Wann gilt Gleichheit?

(Walther Janous)

2. Es sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC und AC seien D bzw. E. Der Schnittpunkt der Geraden AI und DE sei P. Die Mittelpunkte der Seiten BC und AB seien M bzw. N.

   Man beweise, dass die Punkte M, N und P auf einer Geraden liegen.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob beschließen, eine 2018-stellige Zahl im Dezimalsystem ziffernweise von links nach rechts festzulegen, wobei Alice beginnt und die beiden sich abwechseln. Dabei soll folgende Regel gelten: Jede neu genannte Ziffer soll in einer anderen Restklasse modulo 3 liegen als die unmittelbar davor genannte.

   Da Bob die letzte Ziffer angeben darf, wettet er, dass es ihm gelingt, dass die Zahl am Ende durch 3 teilbar ist. Kann Alice das verhindern?

(Richard Henner)

4. Es sei M eine Menge von positiven ganzen Zahlen mit den folgenden drei Eigenschaften:

   (1) $2018 \in M$.

   (2) Wenn $m \in M$, dann sind auch alle positiven Teiler von m Elemente von M.

   (3) Für alle Elemente k, $m \in M$ mit $1 < k < m$ ist auch $km + 1$ ein Element von M.

   Man beweise, dass $M = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gilt.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.