47. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene, Teil 1

30. April 2016

1. Man bestimme die größte Konstante C derart, dass für alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die Ungleichung

   $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_6)^2 \geq C \cdot (x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_3 + x_4) + \cdots + x_6(x_1 + x_2))$$

   gilt.

   Man ermittle für dieses C alle $x_1, x_2, \ldots, x_6$, für die Gleichheit gilt.

   (Walther Janous)

2. Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit $AB > AC$. Der Höhenschnittpunkt des Dreiecks werde mit H bezeichnet. Spiegelt man den Punkt C an der Höhe AH, erhält man den Punkt E. Der Schnittpunkt der Geraden EH mit der Geraden AC sei F.

   Man beweise: Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AEF liegt auf der Geraden AB.

   (Karl Czakler)

3. Es sind 2016 Punkte auf einem Kreis angeordnet. Wir dürfen nach Lust und Laune 2 oder 3 Punkte im Uhrzeigersinn weiter springen.

   Wie viele Sprünge muss man mindestens machen, um alle Punkte zu erreichen und wieder am Ausgangspunkt anzukommen?

   (Gerd Baron)

4. Man bestimme alle zusammengesetzten positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Sind $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, so gilt

   $$(d_2 - d_1) : (d_3 - d_2) : \cdots : (d_k - d_{k-1}) = 1 : 2 : \cdots : (k - 1).$$

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.