



55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

11. Juni 2024

1. Seien x und y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Man zeige, dass

$$\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} \geq 6.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

2. Sei $ABCD$ ein Trapez mit den Parallelseiten AB und CD , mit $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ und mit $AB + CD = BC$. Sei weiters M der Mittelpunkt von AD .

Man zeige, dass $\sphericalangle CMB = 90^\circ$.

(Karl Czakler)

3. Anna, Berta und Clara schreiben die Quadratzahlen $1, 4, 9, \dots, 2025$ auf die Tafel, rechnen ihre Summe aus und stellen fest, dass diese durch 3 teilbar ist. Dann vereinbaren sie folgendes Spiel: In jeder Runde streicht zuerst Anna, dann Berta und dann Clara eine Zahl durch, bis alle Zahlen weg sind. Clara hat dabei das Ziel, dass die Summe der verbleibenden Zahlen nach jeder Runde durch 3 teilbar ist.

- Man beweise, dass Anna nicht verhindern kann, dass Clara ihr Ziel mit Bertas Hilfe erreicht.
- Man beweise, dass Berta verhindern kann, dass Clara ihr Ziel mit Annas Hilfe erreicht.

(Richard Henner)

4. Man bestimme die größtmögliche Anzahl aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen, sodass jede dieser Zahlen einen gemeinsamen Teiler mit 2024 hat, der größer als 1 ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.