

## 52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

15. Juni 2021

1. Die Seiten eines Notizbuches sind fortlaufend so nummeriert, dass am ersten Blatt die Nummern 1 und 2 stehen, am zweiten Blatt die Nummern 3 und 4, und so weiter. Ein Blatt wird aus diesem Notizbuch herausgerissen. Alle Seitennummern der verbleibenden Blätter werden addiert. Dabei erhält man 2021 als Summe.

- (a) Wie viele Seiten kann das Notizbuch ursprünglich gehabt haben?  
 (b) Welche Seitennummern können auf dem herausgerissenen Blatt stehen?

(Walther Janous)

2. Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit dem Umkreismittelpunkt  $U$ , sodass  $\sphericalangle CBA = 60^\circ$  und  $\sphericalangle CBU = 45^\circ$  gelten. Die Geraden  $BU$  und  $AC$  schneiden einander im Punkt  $D$ .

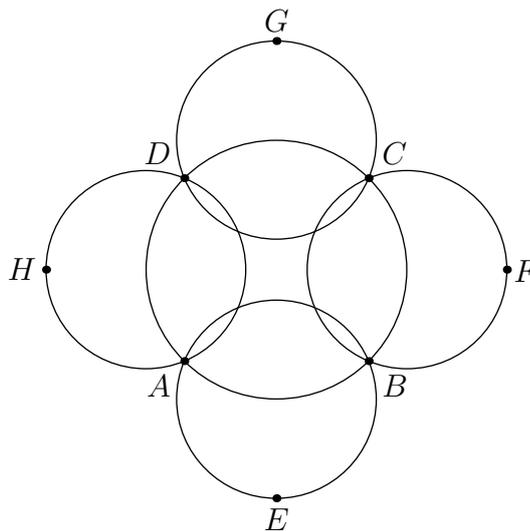
Man beweise, dass  $AD = DU$  gilt.

(Karl Czakler)

3. Die acht Punkte  $A, B, \dots, G$  und  $H$  liegen wie abgebildet auf fünf Kreisen. Jeder dieser Buchstaben wird durch eine der acht Zahlen 1, 2,  $\dots$ , 7 und 8 so ersetzt, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Jede der acht Zahlen wird genau einmal verwendet.  
 (ii) Die Summe der Zahlen auf jedem der fünf Kreise ist gleich.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben auf diese Weise durch die Zahlen zu ersetzen?



(Walther Janous)

4. Sei  $p$  eine Primzahl und seien  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen mit  $p^2 + m^2 = n^2$ .

Man beweise, dass  $m > p$  gilt.

(Karl Czakler)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.