50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior-Regionalwettbewerb

18. Juni 2019

---

1. Es seien x und y ganze Zahlen mit $x + y \neq 0$. Man bestimme alle Paare (x, y), für die

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 10$$

gilt.

(Walther Janous)

2. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Über der Strecke BC wird nach außen ein gleichseitiges Dreieck BCS errichtet. Der Halbierungspunkt der Strecke AS sei N und der Halbierungspunkt der Seite CD sei H.

   Beweise: $\sphericalangle NHC = 60°$.

(Karl Czakler)

3. Alice und Bob spielen ein Jahreszahlspiel. Es werden zwei Spielzahlen 19 und 20 und eine Startzahl aus der Menge $\{9, 10\}$ verwendet. Unabhängig voneinander wählt Alice ihre Spielzahl und Bob wählt die Startzahl. Die andere Spielzahl erhält Bob.

   Dann addiert Alice ihre Spielzahl zur Startzahl, zum Ergebnis addiert Bob seine Spielzahl, zum Ergebnis addiert Alice ihre Spielzahl, u.s.w. Das Spiel geht so lange, bis die Zahl 2019 erreicht oder überschritten ist.

   Wer die Zahl 2019 erreicht, gewinnt. Wird 2019 überschritten, endet das Spiel unentschieden.

   - Man zeige, dass Bob nicht gewinnen kann.
   - Welche Startzahl muss Bob wählen, um zu verhindern, dass Alice gewinnt?

(Richard Henner)

4. Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.