# 46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

9. Juni 2015

1. Es seien $a$, $b$ und $c$ ganze Zahlen, für die die Summe $a^3 + b^3 + c^3$ durch 18 teilbar ist.

   Man beweise, dass das Produkt $abc$ durch 6 teilbar ist.

   *(Karl Czakler)*

2. Für die positiven reellen Zahlen $x$ und $y$ gilt die Bedingung $xy = 4$.

   Man beweise, dass die Ungleichung

   $$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

   gilt. Für welche $x$, $y$ tritt Gleichheit ein?

   *(Walther Janous)*

3. Anton wählt eine beliebige ganze Zahl $n \geq 0$, die keine Quadratzahl ist, als Startzahl. Berta addiert dazu die nächstgrößere ganze Zahl $n+1$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat sie gewonnen. Andernfalls addiert Anton zur Summe die nächstgrößere ganze Zahl $n+2$. Ist die Summe eine Quadratzahl, so hat er gewonnen. Andernfalls ist wieder Berta am Zug und addiert die nächstgrößere ganze Zahl $n+3$, und so weiter.

   Man zeige, dass es unendlich viele Startzahlen gibt, mit denen Anton gewinnt.

   *(Richard Henner)*

4. Der Kreis $k_2$ berührt den Kreis $k_1$ von innen im Punkt $X$. Der Punkt P liegt auf keiner der beiden Kreislinien und nicht auf der Geraden durch die beiden Kreismittelpunkte. Der Punkt $N_1$ ist jener Punkt auf $k_1$, der $P$ am nächsten liegt, und $F_1$ ist jener Punkt auf $k_1$, der von $P$ am weitesten entfernt ist. Analog ist der Punkt $N_2$ jener Punkt auf $k_2$, der $P$ am nächsten liegt, und $F_2$ ist jener Punkt auf $k_2$, der von $P$ am weitesten entfernt ist.

   Man beweise, dass $\sphericalangle N_1XN_2 = \sphericalangle F_1XF_2$ gilt.

   *(Robert Geretschläger)*

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.