



## 57. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

26. März 2026

1. Seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen mit

$$(a + 4)(b + 1) = 24.$$

Man beweise die Ungleichung

$$a^2 + b^2 \geq 13.$$

Wann gilt Gleichheit?

(Karl Czakler)

2. Sei  $k$  der Umkreis eines Quadrats  $ABCD$ . Sei  $P$  ein Punkt auf dem kürzeren Kreisbogen  $CD$  von  $k$  mit  $P \neq C$  und  $P \neq D$ . Der Schnittpunkt der Geraden  $BP$  mit der Geraden  $AC$  sei  $Q$ , der Schnittpunkt der Geraden  $CP$  mit der Geraden  $AD$  sei  $R$ .

Man beweise, dass die Gerade  $RQ$  normal auf die Gerade  $AC$  steht.

(Karl Czakler)

3. Sei  $n$  eine positive ganze Zahl. Eine Menge positiver ganzer Zahlen heiße *luftig*, wenn sie keine zwei benachbarten Zahlen enthält. Für jede luftige Teilmenge der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$  wird das Produkt ihrer Elemente berechnet, dann werden die Quadrate aller dieser Produkte addiert, wobei der leeren Teilmenge das Produkt 1 zugewiesen wird.

Man bestimme diese Summe  $s_n$ .

Beispiel:  $n = 3$

Die luftigen Teilmengen von  $\{1, 2, 3\}$  sind  $\{\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  und  $\{1, 3\}$ . Für die Produkte erhalten wir:

$\{\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 3\}$
1	1	2	3	3

Die Summe der Quadrate ergibt also  $s_3 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$ .

(Walther Janous)

4. Man beweise die folgenden beiden Behauptungen.

- (a) Es gibt unendlich viele Quadratzahlen der Form  $3^k + 3^n$  mit positiven ganzen Zahlen  $k$  und  $n$ .
- (b) Es gibt keine Quadratzahlen der Form  $7^k + 7^n$  mit positiven ganzen Zahlen  $k$  und  $n$ .

(Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.