56. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

3. April 2025

1. Sei $n \geq 3$ eine positive ganze Zahl.

   Man beweise, dass für alle reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in [0, 2]$ mit $x_1 + \ldots + x_n = 5$ die Ungleichung
   $$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 9$$
   gilt. Wann gilt Gleichheit?

   (Walther Janous)

2. Sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und Umkreis k. Die Normale auf BC durch B wird mit n bezeichnet. Sei weiters M ein beliebiger, aber von B verschiedener, Punkt auf n. Der Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M und dem Radius BM schneide AB ein weiteres Mal im Punkt P und den Umkreis k ein weiteres Mal im Punkt Q.

   Man beweise, dass die Punkte P, Q und C auf einer Geraden liegen.

   (Karl Czakler)

3. In einer Stadt gibt es 6 verschiedene Autobuslinien, wobei jede genau in 5 Stationen hält und in beide Richtungen verkehrt. Trotzdem gibt es für je zwei verschiedene Stationen immer eine Autobuslinie, die diese beiden Stationen miteinander verbindet. Man bestimme die maximale Anzahl von Stationen dieser Stadt.

   (Karl Czakler)

4. Sei z eine positive ganze Zahl, die nicht durch 8 teilbar ist. Weiters sei $n \geq 2$ eine positive ganze Zahl.

   Man beweise, dass keine der Zahlen der Form $z^n + z + 1$ eine Quadratzahl ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.