53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

31. März 2022

1. Es seien a und b positive reelle Zahlen, für die $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ gilt.

   Man beweise, dass für sie die Ungleichung

   $$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \geq 4$$

   erfüllt ist, und man bestimme, wann Gleichheit eintritt.

   (Walther Janous)

2. Man bestimme die Anzahl aller positiven ganzen zehnstelligen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

   - Die Zahl enthält jede der Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 8$ und 9 genau einmal.
   - Jede Ziffer, außer der 9, besitzt eine Nachbarziffer, die größer ist als sie.

   (*Anmerkung.* Beispielsweise sind in der Zahl 1230 die Ziffern 1 bzw. 3 die Nachbarziffern von 2 und 2 bzw. 0 die Nachbarbarziffern von 3. Die Ziffern 1 und 0 haben nur eine Nachbarziffer.)

   (Karl Czakler)

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC \neq BC$. Seien I und U der Inkreis- bzw. Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Der Inkreis berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC im Punkt E. Die Umkreise der Dreiecke ABC und CDE schneiden einander in den zwei Punkten C und P.

   Man beweise, dass der Schnittpunkt S der Geraden CU und PI am Umkreis des Dreiecks ABC liegt.

   (Karl Czakler)

4. Gegeben sei die Menge

   $$M = \{-2^{2022}, -2^{2021}, \ldots, -2^2, -2, -1, 1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2021}, 2^{2022}\}.$$

   Sei T eine Teilmenge von M, in der benachbarte Zahlen die gleiche Differenz haben, wenn man die Elemente der Größe nach ordnet.

   (a) Man bestimme die größte Anzahl von Elementen, die eine derartige Menge T enthalten kann.

   (b) Man gebe alle Mengen T mit der größtmöglichen Anzahl an Elementen an.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.