51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Regionalwettbewerb für Fortgeschrittene

2. April 2020

---

1. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen a, für die die Gleichung
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x+a}\right)=a-x$$
mindestens eine ganzzahlige Lösung für x hat.

   Für jedes solche a gebe man die entsprechenden Lösungen an.

   (Richard Henner)

2. Die Menge M besteht aus allen 7-stelligen positiven ganzen Zahlen, die (in Dezimalschreibweise) jede der Ziffern 1, 3, 4, 6, 7, 8 und 9 genau einmal enthalten.

   (a) Man bestimme die kleinste positive Differenz d von zwei Zahlen aus M.

   (b) Wie viele Paare (x, y) mit x und y aus M gibt es, für die $x - y = d$ gilt?

   (Gerhard Kirchner)

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AB < AC$. Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sei I. Die Streckensymmetrale der Seite BC schneide die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAC$ im Punkt S und die Winkelsymmetrale von $\sphericalangle CBA$ im Punkt T.

   Man beweise, dass die Punkte C, I, S und T auf einem Kreis liegen.

   (Karl Czakler)

4. Man bestimme alle Quadrupel (p, q, r, n) von Primzahlen p, q, r und positiven ganzen Zahlen n, für die
$$p^2 = q^2 + r^n$$
erfüllt ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.