# 49. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

5. April 2018

1. Es seien $a$ und $b$ nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b < 2$.

   Man beweise die folgende Ungleichung:

   $$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$$

   Für welche $a$, $b$ gilt Gleichheit?

   *(Gottfried Perz)*

2. Es seien $k$ ein Kreis mit Radius $r$ und $AB$ eine Sehne von $k$ mit $\overline{AB} > r$. Weiters sei $S$ jener Punkt auf der Sehne $AB$, für den $\overline{AS} = r$ gilt. Die Streckensymmetrale von $BS$ schneide den Kreis $k$ in den Punkten $C$ und $D$. Die Gerade durch die Punkte $D$ und $S$ schneide $k$ in einem weiteren Punkt $E$.

   Man beweise, dass das Dreieck $CSE$ gleichseitig ist.

   *(Stefan Leopoldseder)*

3. Man bestimme für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die Anzahl $a_n$ der dreielementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, in denen ein Element das arithmetische Mittel der beiden anderen Elemente ist.

   *(Walther Janous)*

4. Für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von $n$.

   Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die

   $$d(n-1) + d(n) + d(n+1) \leq 8$$

   gilt.

   *(Richard Henner)*

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.