46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene

26. März 2015

---

1. *(R. Henner)* Man bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, für die die Bedingungen

$$\operatorname{ggT}(a, 20) = b, \qquad \operatorname{ggT}(b, 15) = c \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ggT}(a, c) = 5$$

   gelten.

2. *(K. Czakler)* Es seien x, y und z positive reelle Zahlen mit $x + y + z = 3$.
   Man beweise, dass mindestens eine der drei Zahlen

$$x(x + y - z), \qquad y(y + z - x) \qquad \text{oder} \qquad z(z + x - y)$$

   kleiner oder gleich 1 ist.

3. *(T. Eisenkölbl)* Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geq 3$. Auf einer Tafel stehen die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. In jedem Spielzug wählt man zwei Zahlen aus und ersetzt sie durch ihr arithmetisches Mittel. Dies geschieht so lange, bis nur mehr eine Zahl auf der Tafel steht.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl, die man durch eine geeignete Folge von Spielzügen am Ende erreichen kann.

4. *(W. Janous)* Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\sphericalangle ACB < 60°$. Wir bezeichnen den Inkreismittelpunkt und den Umkreismittelpunkt mit I bzw. U. Der Umkreis des Dreiecks BIU schneidet den Schenkel BC ein zweites Mal im Punkt D.

   (a) Man beweise, dass die Geraden AC und DI parallel sind.

   (b) Man beweise, dass die Geraden UD und IB aufeinander normal stehen.

Arbeitszeit: 4 Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.