

55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

29. Mai 2024

1. Man bestimme die kleinste Konstante C , sodass für alle reellen Zahlen X und Y die Ungleichung

$$(X + Y)^2(X^2 + Y^2 + C) + (1 - XY)^2 \geq 0$$

erfüllt ist.

Für welche Werte von X und Y wird mit dieser kleinsten Konstanten C in der Ungleichung Gleichheit angenommen?

(Walther Janous)

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Die Punkte D , E und F seien die Höhenfußpunkte auf BC , AC bzw. AB . Der Schnittpunkt der Geraden EF und BC sei S . Man beweise, dass die Umkreise k_1 und k_2 der Dreiecke AEF und DES einander in E berühren.

(Karl Czakler)

3. Am Anfang stehen die Zahlen $1, 2, \dots, 2024$ an einer Tafel. Trixi und Nana spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd am Zug sind. Trixi beginnt.

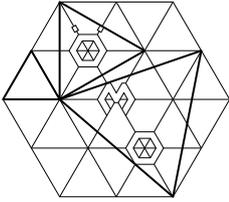
Wer am Zug ist, wählt zwei Zahlen a und b aus, löscht beide, und schreibt deren (möglicherweise negative) Differenz $a - b$ an die Tafel. Dies wird so lange wiederholt, bis nach 2023 Schritten nur noch eine einzige Zahl an der Tafel steht. Trixi gewinnt, wenn diese Zahl durch 3 teilbar ist, andernfalls gewinnt Nana.

Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

(Birgit Vera Schmidt)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.



55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

30. Mai 2024

4. Sei ABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S . Die Mittelpunkte der Seiten BC , AC und AB seien mit D , E bzw. F bezeichnet. Man zeige, dass der Umkreis von ABC , der Umkreis von DEF und der Kreis mit Durchmesser HS durch zwei gemeinsame Punkte gehen.

(Josef Greilhuber)

5. Sei n eine positive ganze Zahl und seien z_1, z_2, \dots, z_n positive ganze Zahlen, sodass für $j = 1, 2, \dots, n$ die Ungleichungen

$$z_j \leq j$$

gelten und $z_1 + \dots + z_n$ gerade ist.

Man beweise, dass sich unter den Werten

$$z_1 \pm z_2 \pm \dots \pm z_n$$

die Zahl 0 befindet, wobei unabhängig voneinander für jede Operation $+$ oder $-$ gewählt werden kann.

(Walther Janous)

6. Man bestimme für jede Primzahl p die Anzahl der Restklassen modulo p , die sich als $a^2 + b^2$ modulo p darstellen lassen, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind.

(Daniel Holmes)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

Lösungen: <http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2024>

