55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

29. Mai 2024

1. Man bestimme die kleinste Konstante C, sodass für alle reellen Zahlen X und Y die Ungleichung
$$(X+Y)^2(X^2+Y^2+C)+(1-XY)^2 \geq 0$$
erfüllt ist.

   Für welche Werte von X und Y wird mit dieser kleinsten Konstanten C in der Ungleichung Gleichheit angenommen?

   (Walther Janous)

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$. Die Punkte D, E und F seien die Höhenfußpunkte auf BC, AC bzw. AB. Der Schnittpunkt der Geraden EF und BC sei S.

   Man beweise, dass die Umkreise k_1 und k_2 der Dreiecke AEF und DES einander in E berühren.

   (Karl Czakler)

3. Am Anfang stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2024$ an einer Tafel. Trixi und Nana spielen ein Spiel, bei dem sie abwechselnd am Zug sind. Trixi beginnt.

   Wer am Zug ist, wählt zwei Zahlen a und b aus, löscht beide, und schreibt deren (möglicherweise negative) Differenz $a-b$ an die Tafel. Dies wird so lange wiederholt, bis nach 2023 Schritten nur noch eine einzige Zahl an der Tafel steht. Trixi gewinnt, wenn diese Zahl durch 3 teilbar ist, andernfalls gewinnt Nana.

   Wer von den beiden hat eine Gewinnstrategie?

   (Birgit Vera Schmidt)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

55. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

30. Mai 2024

4. Sei ABC ein stumpfwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB seien mit D, E bzw. F bezeichnet. Man zeige, dass der Umkreis von ABC, der Umkreis von DEF und der Kreis mit Durchmesser HS durch zwei gemeinsame Punkte gehen.

   (Josef Greilhuber)

5. Sei n eine positive ganze Zahl und seien z_1, z_2, …, z_n positive ganze Zahlen, sodass für $j = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichungen
   $$z_j \leq j$$
   gelten und $z_1 + \ldots + z_n$ gerade ist.

   Man beweise, dass sich unter den Werten
   $$z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_n$$
   die Zahl 0 befindet, wobei unabhängig voneinander für jede Operation $+$ oder $-$ gewählt werden kann.

   (Walther Janous)

6. Man bestimme für jede Primzahl p die Anzahl der Restklassen modulo p, die sich als $a^2 + b^2$ modulo p darstellen lassen, wobei a und b beliebige ganze Zahlen sind.

   (Daniel Holmes)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2024`