53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

25. Mai 2022

1. Man finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ mit

$$a - f(b) \mid af(a) - bf(b) \text{ für alle } a, b \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

(Theresia Eisenkölbl)

2. Sei ABC ein spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, Mittelpunkt M der Seite AB und Winkelsymmetrale w des Winkels $\sphericalangle ACB$. Seien weiters S der Schnittpunkt der Streckensymmetrale der Seite AB mit w sowie F der Fußpunkt des Lotes von H auf w.

   Man beweise, dass die Strecken MS und MF gleich lang sind.

(Karl Czakler)

3. Lisa schreibt eine positive ganze Zahl im Dezimalsystem an die Tafel und macht nun in jedem Zug das Folgende:

   Von der Zahl auf der Tafel wird die letzte Ziffer gelöscht und dann wird zur nun verbleibenden kürzeren Zahl (bzw. zu 0, wenn die Zahl einstellig war) das Vierfache der gelöschten Ziffer addiert. Die Zahl auf der Tafel wird nun durch das Ergebnis dieser Rechnung ersetzt.

   Das wiederholt Lisa solange, bis sie zum ersten Mal eine Zahl erhält, die schon einmal auf der Tafel war.

   (a) Man zeige, dass die Zugfolge immer endet.

   (b) Welche Zahl steht zuletzt an der Tafel, wenn Lisa mit der Zahl $53^{2022} - 1$ beginnt?

   Beispiel: Beginnt Lisa mit der Zahl 2022, so erhält sie im ersten Zug $202 + 4 \cdot 2 = 210$ und insgesamt die Folge

$$2022 \mapsto 210 \mapsto 21 \mapsto 6 \mapsto 24 \mapsto 18 \mapsto 33 \mapsto 15 \mapsto 21.$$

   Da Lisa 21 zum zweiten Mal erhält, endet die Zugfolge.

(Stephan Pfannerer)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

53. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

26. Mai 2022

4. Man entscheide, ob es für jedes Polynom P vom Grad ≥ 1 mit ganzzahligen Koeffizienten unendlich viele Primzahlen gibt, die jeweils mindestens ein $P(n)$ für eine positive ganze Zahl n teilen.

   (Walther Janous)

5. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB.

   Wir wählen einen Punkt P im Inneren der Dreieckshöhe durch C. Der Kreis mit Durchmesser CP schneide die Gerade durch B und P ein weiteres Mal im Punkt D_P und die Gerade durch A und C ein weiteres Mal im Punkt E_P.

   Man beweise, dass es einen Punkt F gibt, sodass für jede Wahl von P die Punkte D_P, E_P und F auf einer Geraden liegen.

   (Walther Janous)

6. (a) Man beweise, dass sich ein Quadrat mit Seitenlänge 1000 in 31 Quadrate zerlegen lässt, von denen zumindest eines eine Seitenlänge kleiner als 1 hat.

   (b) Man zeige, dass eine entsprechende Zerlegung auch in 30 Quadrate möglich ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2022`