52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

4. Juni 2021

1. Seien a, b und c paarweise verschiedene natürliche Zahlen.

   Man beweise
   $$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + a + b + c.$$
   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

2. Herr Ganzgenau möchte sein Teehäferl ganz genau vorne aus der Mikrowelle herausnehmen. Die Mikrowelle von Herrn Ganzgenau möchte da aber so ganz genau gar nicht mitspielen.

   Ganz genau gesagt spielen die beiden das folgende Spiel:

   Sei n eine positive ganze Zahl. In n Sekunden macht der Drehteller der Mikrowelle eine vollständige Umdrehung. Bei jedem Einschalten der Mikrowelle wird eine ganzzahlige Anzahl von Sekunden entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht, sodass es n mögliche Positionen gibt, auf denen das Teehäferl stehen bleiben kann. Eine dieser Positionen ist ganz genau vorne.

   Zu Beginn dreht die Mikrowelle das Teehäferl auf eine der n möglichen Positionen. Danach gibt Herr Ganzgenau in jedem Zug eine ganzzahlige Anzahl von Sekunden ein, und die Mikrowelle entscheidet, entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn diese Anzahl von Sekunden lang zu drehen.

   Für welche n kann Herr Ganzgenau erzwingen, das Teehäferl nach endlich vielen Zügen ganz genau vorne aus der Mikrowelle nehmen zu können?

   (Birgit Vera Schmidt)

3. Man bestimme alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die
   $$a^{b+20}(c-1) = c^{b+21} - 1$$
   erfüllt ist.

   (Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

5. Juni 2021

4. Sei α eine reelle Zahl. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + \alpha f(x) y$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

(Walther Janous)

5. Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit den Diagonalen AC und BD. Jeder der vier Eckpunkte wird an der Diagonale gespiegelt, auf der er nicht liegt.

   (a) Man untersuche, wann die vier so erhaltenen Punkte auf einer Geraden liegen und gebe eine möglichst einfache äquivalente Bedingung an das Sehnenviereck $ABCD$ dafür an.

   (b) Man zeige, dass in allen anderen Fällen die vier so erhaltenen Punkte auf einem Kreis liegen.

(Theresia Eisenkölbl)

6. Seien p eine ungerade Primzahl und M eine Menge, die aus $\frac{p^2+1}{2}$ Quadratzahlen besteht. Man untersuche, ob sich aus dieser Menge p Elemente auswählen lassen, deren arithmetisches Mittel eine ganze Zahl ist.

(Walther Janous)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2021`