# 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

20. Juni 2020

1. Sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Diagonalenschnittpunkt $S$. Seien weiters $P$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $ABS$ und $Q$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $BCS$. Die Parallele zu $AD$ durch $P$ und die Parallele zu $CD$ durch $Q$ schneiden einander im Punkt $R$.

   Man beweise, dass $R$ auf $BD$ liegt.

   *(Karl Czakler)*

2. In der Ebene liegen 2020 Punkte, von denen einige schwarz und die restlichen grün sind.

   Für jeden schwarzen Punkt gilt: Es gibt genau zwei grüne Punkte, die den Abstand 2020 von diesem schwarzen Punkt haben.

   Man bestimme die kleinstmögliche Anzahl von grünen Punkten.

   *(Walther Janous)*

3. Seien $a$ eine feste positive ganze Zahl und $(e_n)$ die Folge, die durch $e_0 = 1$ und

   $$e_n = a + \prod_{k=0}^{n-1} e_k$$

   für $n \geq 1$ definiert ist.

   (a) Man zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die ein Element der Folge teilen.

   (b) Man zeige, dass es eine Primzahl gibt, die kein Element der Folge teilt.

   *(Theresia Eisenkölbl)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

## 51. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

27. Juni 2020

4. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(xf(y)+1) = y + f(f(x)f(y))$$

für alle $x$, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

*(Theresia Eisenkölbl)*

5. Sei $h$ ein Halbkreis mit Durchmesser $AB$. Es wird ein beliebiger Punkt $P$ im Inneren der Strecke $AB$ gewählt. Die durch $P$ verlaufende Normale auf $AB$ schneide $h$ im Punkt $C$. Die Strecke $PC$ zerlegt die Halbkreisfläche in zwei Teile. In jeden davon werde jener Kreis eingeschrieben, der $AB$, $PC$ und $h$ berührt. Die Berührpunkte der beiden Kreise mit $AB$ werden mit $D$ und $E$ bezeichnet, wobei $D$ zwischen $A$ und $P$ liege.

   Man beweise, dass die Größe des Winkels $\sphericalangle DCE$ nicht von der Wahl von $P$ abhängt.

*(Walther Janous)*

6. Die Spieler Alfred und Bertrand legen gemeinsam ein Polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit dem vorgegebenen Grad $n \geq 2$ fest. Dazu wählen sie in $n$ Zügen abwechselnd den Wert jeweils eines Koeffizienten, wobei alle Koeffizienten ganzzahlig sein müssen und $a_0 \neq 0$ gelten muss. Alfred ist im ersten Zug an der Reihe. Alfred gewinnt, wenn das Polynom am Ende eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

   (a) Für welche $n$ kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten $a_j$ von rechts nach links, also für $j = 0, 1, \ldots, n-1$, festgelegt werden?

   (b) Für welche $n$ kann Alfred den Sieg erzwingen, wenn die Koeffizienten $a_j$ von links nach rechts, also für $j = n-1, n-2, \ldots, 0$, festgelegt werden?

*(Theresia Eisenkölbl, Clemens Heuberger)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2020`