50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 1)

29. Mai 2019

1. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die
$$f(2x + f(y)) = x + y + f(x)$$
für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(Gerhard Kirchner)

2. Ein (konvexes) Trapez $ABCD$ heiße *gut*, wenn es einen Umkreis besitzt, die Seiten AB und CD die Parallelseiten sind und CD kürzer als AB ist. Für ein gutes Trapez $ABCD$ werden folgende Bezeichnungen festgelegt.

   - Die durch B verlaufende Parallele zu AD schneide die Verlängerung der Seite CD im Punkt S.
   - Die beiden Tangenten durch S an den Umkreis des Trapezes berühren diesen in E bzw. F, wobei E auf derselben Seite der Geraden CD wie A liege.

   Man gebe eine möglichst einfache äquivalente Bedingung (ausgedrückt in den Seitenlängen und/oder Winkeln des Trapezes) dafür an, dass bei einem guten Trapez $ABCD$ die zwei Winkel $\sphericalangle BSE$ und $\sphericalangle FSC$ gleich groß sind.

(Walther Janous)

3. In Oddland gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 3 Cent, 5 Cent usw., wobei es für jede ungerade Zahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Die Post von Oddland schreibt vor: Für je zwei verschiedene Werte muss auf einem Brief die Anzahl der Marken des niedrigeren Wertes mindestens so groß sein wie die Anzahl der Marken des höheren Wertes.

   In Squareland hingegen gibt es Briefmarken mit Werten 1 Cent, 4 Cent, 9 Cent usw., wobei es für jede Quadratzahl genau eine Briefmarkensorte gibt. Marken können in Squareland beliebig ohne weitere Vorschriften kombiniert werden.

   Man beweise für jede positive ganze Zahl n: In den beiden Ländern gibt es gleich viele Möglichkeiten, einen Brief vorschriftsgemäß mit Marken im Gesamtwert von n Cent zu frankieren. Dabei macht es keinen Unterschied, wenn man dieselben Briefmarken auf einem Brief anders anordnet.

(Stephan Wagner)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb – Finale (Tag 2)

30. Mai 2019

4. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $a + b + c + 2 = abc$.

   Man beweise
   $$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 27.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

5. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Es seien D und E die Höhenfußpunkte auf den Seiten BC bzw. AC. Auf den Strecken AD und BE liegen die Punkte F bzw. G derart, dass
   $$\frac{AF}{FD} = \frac{BG}{GE}$$
   gilt. Die Gerade durch C und F schneide BE im Punkt H, und die Gerade durch C und G schneide AD im Punkt I.

   Man beweise, dass die Punkte F, G, H und I auf einem Kreis liegen.

   (Walther Janous)

6. Man bestimme die kleinstmögliche positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Für alle positiven ganzen Zahlen x, y und z mit $x \mid y^3$ und $y \mid z^3$ und $z \mid x^3$ gilt immer auch $xyz \mid (x+y+z)^n$.

   (Gerhard J. Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2019`