48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

24. Mai 2017

1. Es sei eine reelle Zahl α gegeben.

   Man bestimme in Abhängigkeit von α alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

   $$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 + \alpha y f(y)$$

   für alle x, $y \in \mathbb{R}$.

   (Walther Janous)

2. Auf einer Kette sind 2016 Perlen im Kreis angeordnet, von denen jede eine der Farben schwarz, blau oder grün hat. In jedem Schritt wird gleichzeitig jede Perle durch eine neue Perle ersetzt, wobei sich die Farbe der neuen Perle wie folgt bestimmt: Falls die beiden ursprünglichen Nachbarn dieselbe Farbe hatten, hat die neue Perle deren Farbe. Falls die Nachbarn zwei verschiedene Farben hatten, hat die neue Perle die dritte Farbe.

   (a) Gibt es eine solche Kette, auf der die Hälfte der Perlen schwarz und die andere Hälfte grün ist, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

   (b) Gibt es eine solche Kette, auf der tausend Perlen schwarz und die übrigen grün sind, aus der man mit solchen Schritten eine Kette aus lauter blauen Perlen erhalten kann?

   (c) Ist es möglich, von einer Kette, die genau zwei benachbarte schwarze und sonst nur blaue Perlen enthält, mit solchen Schritten zu einer Kette zu kommen, die genau eine grüne und sonst nur blaue Perlen enthält?

   (Theresia Eisenkölbl)

3. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die Folge rationaler Zahlen mit $a_0 = 2016$ und

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$$

   für alle $n \geq 0$.

   Man zeige, dass diese Folge kein Quadrat einer rationalen Zahl enthält.

   (Theresia Eisenkölbl)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

48. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

25. Mai 2017

4. (a) Man bestimme den größtmöglichen Wert M, den $x+y+z$ annehmen kann, wenn x, y und z positive reelle Zahlen mit

$$16xyz = (x+y)^2(x+z)^2$$

sind.

(b) Man zeige, dass es unendlich viele Tripel (x, y, z) positiver rationaler Zahlen gibt, für die

$$16xyz = (x+y)^2(x+z)^2 \text{ und } x+y+z = M$$

gelten.

(Karl Czakler)

5. Es seien ABC ein spitzwinkeliges Dreieck, H sein Höhenschnittpunkt und D, E und F die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C. Der Schnittpunkt von DF mit der Höhe durch B sei P. Die Normale auf BC durch P schneide die Seite AB in Q. Der Schnittpunkt von EQ mit der Höhe durch A sei N.

Man beweise, dass N die Strecke AH halbiert.

(Karl Czakler)

6. Es sei $S = \{1, 2, \ldots, 2017\}$.

Man bestimme die größtmögliche natürliche Zahl n, für die es n verschiedene Teilmengen von S gibt, sodass für keine zwei dieser Teilmengen ihre Vereinigung gleich S ist.

(Gerhard Woeginger)

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2017`