# 47. Österreichische Mathematik-Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 1)

25. Mai 2016

---

1. Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, sodass für alle $x$, $y \in \mathbb{Q}^+$

$$f\left(\frac{x}{y} + y\right) = \frac{f(x)}{f(y)} + f(y) + \alpha x$$

   gilt.

   Dabei bezeichnet $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

   *(Walther Janous)*

2. Es sei $ABC$ ein Dreieck. Sein Inkreis berühre die Seiten $BC$, $CA$ und $AB$ in den Punkten $D$, $E$ bzw. $F$. Der Schnittpunkt der Geraden $ED$ mit der Normalen auf $EF$ durch $F$ sei $P$ und der Schnittpunkt der Geraden $EF$ mit der Normalen auf $ED$ durch $D$ sei $Q$.

   Man beweise: Der Punkt $B$ ist Mittelpunkt der Strecke $PQ$.

   *(Karl Czakler)*

3. Wir betrachten Anordnungen der Zahlen 1 bis 64 auf den Feldern eines $8 \times 8$-Schachbretts, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält und jede Zahl genau einmal vorkommt.

   Eine Zahl in einer derartigen Anordnung heißt *super-plus-gut*, falls sie die größte Zahl in ihrer Zeile und gleichzeitig die kleinste Zahl in ihrer Spalte ist.

   Man beweise oder widerlege jeweils:

   (a) In jeder derartigen Anordnung gibt es mindestens eine super-plus-gute Zahl.

   (b) In jeder derartigen Anordnung gibt es höchstens eine super-plus-gute Zahl.

   *(Gerhard J. Woeginger)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

# 47. Österreichische Mathematik-Olympiade

## Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene (Tag 2)

26. Mai 2016

---

4. Es seien $a$, $b$, $c \geq -1$ reelle Zahlen mit $a^3 + b^3 + c^3 = 1$.

   Man beweise:

   $$a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   *(Karl Czakler)*

5. Gegeben sei ein Spielbrett, das aus $n \times n$ quadratischen Feldern besteht, wobei $n \geq 2$ gilt. Felder, die direkt horizontal oder vertikal neben einem Feld liegen, werden als dessen Nachbarn bezeichnet. Zu Beginn sind auf den Feldern $k$ Spielsteine verteilt, wobei sich auf einem Feld auch mehrere oder keine Spielsteine befinden können.

   In jedem Spielzug wählt man nun ein Feld aus, das mindestens so viele Spielsteine wie Nachbarn besitzt und legt auf jedes Nachbarfeld einen dieser Spielsteine. Das Spiel endet, wenn es kein derartiges Feld zur Auswahl gibt.

   (a) Man bestimme das kleinste $k$, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge nicht endet.

   (b) Man bestimme das größte $k$, für das das Spiel für jede mögliche Anfangsanordnung und Wahl der Spielzüge endet.

   *(Theresia Eisenkölbl)*

6. Es seien $a$, $b$, $c$ ganze Zahlen, für die

   $$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

   ganzzahlig ist.

   Man beweise: Jede der Zahlen

   $$\frac{ab}{c}, \ \frac{ac}{b} \quad \text{und} \quad \frac{bc}{a}$$

   ist eine ganze Zahl.

   *(Gerhard J. Woeginger)*

Arbeitszeit: $4\frac{1}{2}$ Stunden.
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Lösungen: `http://www.math.aau.at/OeMO/loesungen/BWF/2016`