46. Österreichische Mathematik-Olympiade

Bundeswettbewerb für Fortgeschrittene

20. und 21. Mai 2015

1. Es sei $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $f(1) = 0$,

   (ii) $f(p) = 1$ für alle Primzahlen p,

   (iii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ für alle x, y in $\mathbb{Z}_{>0}$.

   Man bestimme die kleinste ganze Zahl $n \geq 2015$, die $f(n) = n$ erfüllt.

   (Gerhard J. Woeginger)

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Mittelpunkt der Seite AB heiße M.

   Es sei P ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Spiegelung von P an M ergebe den Punkt Q.

   Weiters seien D und E die Schnittpunkte der Geraden AP bzw. BP mit den Seiten BC bzw. AC.

   Man beweise, dass die Punkte A, B, D und E genau dann auf einem Kreis liegen, wenn $\sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$ gilt.

   (Karl Czakler)

3. Wir betrachten die folgende Operation, die aus einer gegebenen natürlichen Zahl eine neue Zahl entstehen lässt: Die gegebene Zahl wird in einer beliebigen ganzzahligen Basis $b \geq 2$ dargestellt, in der sie zweistellig mit beiden Ziffern ungleich 0 ist. Dann werden die beiden Ziffern vertauscht und das Ergebnis in der Zifferndarstellung zur Basis b ist die neue Zahl.

   Ist es möglich, mit eventuell mehreren dieser Operationen jede Zahl größer als zehn zu einer Zahl kleiner oder gleich zehn zu verändern?

   (Theresia Eisenkölbl)

4. Es seien x, y, z positive reelle Zahlen mit $x + y + z \geq 3$. Man beweise:

$$\frac{1}{x+y+z^2} + \frac{1}{y+z+x^2} + \frac{1}{z+x+y^2} \leq 1.$$

   Wann gilt Gleichheit?

   (Karl Czakler)

5. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und k ein Kreis durch A und B. Dieser Kreis schneide

   - die Gerade AI in den Punkten A und P,
   - die Gerade BI in den Punkten B und Q,
   - die Gerade AC in den Punkten A und R sowie
   - die Gerade BC in den Punkten B und S,

   wobei die Punkte A, B, P, Q, R und S paarweise verschieden sind und R bzw. S im Inneren der Strecken AC bzw. BC liegen.

   Man zeige, dass die Geraden PS, QR und CI einander in einem Punkt schneiden.

   (Stephan Wagner)

6. Max hat 2015 Dosen, die von 1 bis 2015 nummeriert sind, sowie einen unbeschränkten Vorrat an Münzen.

   Man betrachte folgende Startkonfigurationen:

   (a) Alle Dosen sind leer.

   (b) In der Dose Nummer 1 befindet sich 1 Münze, in der Dose Nummer 2 sind 2 Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer 2015, in der sich 2015 Münzen befinden.

   (c) In der Dose Nummer 1 befinden sich 2015 Münzen, in der Dose Nummer 2 sind 2014 Münzen, und so weiter, bis zur Dose Nummer 2015, in der sich 1 Münze befindet.

   Nun wählt Max in jedem Schritt eine Zahl n mit $1 \leq n \leq 2015$ aus, und fügt zu jeder Dose außer zur Dose Nummer n jeweils n Münzen hinzu.

   Man bestimme für jede der drei Startkonfigurationen (a), (b) bzw. (c), ob Max erreichen kann, dass sich nach endlich vielen Schritten in jeder Dose gleich viele Münzen befinden und mindestens ein Schritt ausgeführt wurde.

   (Birgit Vera Schmidt)