

Primzahlen Lösungen

- A1 Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt. Beweise, dass für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2 , für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Es gilt $p_1 = p_2 + 2$. Durch einsetzen in die Summe und der Eigenschaft der Primzahlen folgt die Teilbarkeit durch 4. Die Teilbarkeit durch 3 erhält man durch den Rest bei Division durch 3.

- A2 Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4n - 1, n \in \mathbb{N}$ gibt.

Für $n = 1$ erhalten wir die Zahl 3, die eine Primzahl ist. Nehmen wir nun an, dass es endlich viele Primzahlen der Form $4n - 1$ gibt - p_1, p_2, \dots, p_m . Wir versuchen nun wieder eine neue Primzahl zu finden, dafür definieren wir uns

$$p_{m+1} := 4 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m - 1$$

Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_m teilbar.

Die Zahl ist nicht durch 2 teilbar.

Die Zahl kann nun entweder eine Primzahl sein oder ein Produkt von Primzahlen der Form $4n + 1, n \in \mathbb{N}$. Da das Produkt von Primzahlen der Form $4n + 1, n \in \mathbb{N}$ jedoch wieder von der Form $4n + 1, n \in \mathbb{N}$ ist und p_{m+1} nicht von dieser Form ist, haben wir einen Widerspruch zur Annahme.

- A3+ Es seien p, q, r und s vier Primzahlen, für die

$$5 < p < q < r < s < p + 10$$

gilt. Man beweise, dass die Summe der vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

Die vier in Rede stehenden Primzahlen müssen sich wegen $p > 5$ und $s < p + 10$ unter den fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen $p, p + 2, p + 4, p + 6$ und $p + 8$ befinden. Unter drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Daher muss sowohl unter den drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen $p, p + 2, p + 4$ als auch unter den drei Zahlen $p + 4, p + 6, p + 8$ jeweils eine Zahl sein, die durch 3 teilbar ist. Vier der fünf Zahlen sind aber Primzahlen, daher muss $p + 4$ die durch 3 teilbare Zahl in beiden Dreiergruppen sein. Die übrigen vier Zahlen $p, p + 2 = q, p + 6 = r$ und $p + 8 = s$ sind somit prim.

Weil unter fünf aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer eine durch 5 teilbar ist, muss $p + 4$ auch durch 5, insgesamt also durch 15 teilbar sein. Damit ergibt sich aber wegen

$$p + q + r + s = p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8) = 4p + 16 = 4(p + 4),$$

dass jede der in Rede stehenden Summen durch 60 teilbar ist.

F1 Falls $2^s - 1$ eine Primzahl ist, dann ist auch s eine Primzahl. Gilt hier auch die Umkehrung?

Angenommen s ist keine Primzahl. Dann gibt es $m, n \in \mathbb{N}$, sodass wir s wie folgt schreiben können $s = m \cdot n$. Also folgt

$$2^s - 1 = 2^{mn} - 1$$

Diese Zahl ist aber durch $2^m - 1$ teilbar (Polynomdivision) und somit keine Primzahl. Die Umkehrung gilt nicht. Gegenbeispiel $s = 11$:

$$2^{11} - 1 = 2047$$

2047 ist durch 23 teilbar.

F2 Zeige, dass $p^q + q^p$ durch $p + q$ teilbar ist, wenn p und q Primzahlzwillinge sind.

Es sei $p > q$. Dann ist $p = q + 2$ und p und q sind ungerade. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{p^q + q^p}{p + q} &= \frac{p^q + q^q + q^p - q^q}{p + q} = \\ &= \frac{p^q + q^q}{p + q} + \frac{q^{q+2} - q^q}{2q + 2} = \frac{p^q + q^q}{p + q} + \frac{q^q(q^2 - 1)}{2(q + 1)} = \\ &= \frac{p^q + q^q}{p + q} + \frac{q^q(q - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Da $p^q + q^q$ durch $p + q$ und $q - 1$ durch 2 teilbar, weil q ungerade ist, ist die Behauptung bewiesen.

F3+ Sei $n \in \mathbb{N}$, zeige, dass

$$19 \cdot 8^n + 17$$

keine Primzahl ist!

Zuerst betrachten wir einige Beispiele ($19 \cdot 8^n + 17 = u_n$):

$$u_0 = 36 = 3 \cdot 12$$

$$u_1 = 169 = 13 \cdot 13$$

$$u_2 = 1233 = 3 \cdot 411$$

$$u_3 = 9745 = 5 \cdot 1949$$

Wir wollen nun eine Fallunterscheidung versuchen - (1) n ist gerade; (2) $n = 4k + 1$; (3) $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.

(1) Wir wollen beweisen, dass für n gerade, u_n immer durch 3 teilbar ist.

$$19 \cdot 8^n + 17 \equiv 2^n + 2 \pmod{3}$$

Da n gerade ist, gilt $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ und somit

$$2^n + 2 = 2^{2m} + 2 = 4^m + 2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

(2) Sei nun $n = 4k + 1$. Wir wollen zeigen, dass dann u_n durch 13 teilbar ist:

$$19 \cdot 8^{4k+1} + 17 \equiv 6 \cdot (-1)^{2k} \cdot 8 + 4 \equiv 6 \cdot 8 + 4 \equiv 0 \pmod{13}.$$

(3) Sei nun $n = 4k + 3$. Wir wollen zeigen, dass dann u_n durch 5 teilbar ist:

$$19 \cdot 8^{4k+3} + 17 \equiv 4 \cdot 8^3 \cdot (8^4)^k + 2 \equiv 4 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \equiv 0 \pmod{5}.$$

Somit kann u_n keine Primzahl sein.